Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Bonusklausur am 15.11.2019
(Teil 1, Lösungen)

13. November 2019

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1

Es sei $M = \{1, 2\}$. Es gilt

$$\mathcal{P}(M) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\Big\}$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(M)) = \Big\{A \mid A \subseteq \mathcal{P}(M)\Big\}.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar:

(i)	falsch	(vi)	wahr
(ii)	falsch	(vii)	wahr
(iii)	wahr	(viii)	falsch
(iv)	falsch	(ix)	falsch
(v)	falsch	(x)	wahr

Aufgabe 2

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \Big\{\emptyset\Big\}$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\}$$

Aufgabe 3a

$f(n)$ ist nicht injektiv, da beispielsweise gilt:

$$f(1) = 1 = f(3).$$

Aufgabe 3b

$f(n)$ ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned} f(n) &= f(m) \\ 42n - 23 &= 42m - 23 \\ 42n &= 42m \\ n &= m \end{aligned}$$

Aufgabe 3c

$f(n)$ ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned} f(n) &= f(m) \\ \left((n-3)^2, n^2\right) &= \left((m-3)^2, m^2\right) \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} (n-3)^2 &= (m-3)^2 && (1) \\ n^2 - 6n + 9 &= m^2 - 6m + 9 \\ n^2 &= m^2 && (2) \end{aligned}$$

Subtraktion von (1) und (2) ergibt:

$$\begin{aligned} -6n + 9 &= -6m + 9 \\ n &= m \end{aligned}$$

Aufgabe 3d

$f(a, b)$ ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned} f(a, b) &= f(x, y) \\ (ba, 5a + 1) &= (yx, 5x + 1) \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} ba &= yx && (1) \\ 5a + 1 &= 5x + 1 && (2) \end{aligned}$$

Aus (2) folgt direkt $a = x$. Einsetzen in (1) und Division durch a ($a \neq 0$ wegen $a \in \mathbb{N}$) ergibt $b = y$; und somit $(a, b) = (x, y)$.

Aufgabe 3e

$f(n,m)$ ist nicht injektiv, da beispielsweise gilt:

$$f(1,0) = 7 = f(2,7).$$

Aufgabe 3f

$f(x,y)$ ist injektiv, denn:

$$f(x,y) = f(a,b)$$
$$\left(xy^3, xy^3 - 2y - 9, (y^2-5)x\right) = \left(ab^3, ab^3 - 2b - 9, (b^2-5)a\right)$$

Es folgt

$$xy^3 = ab^3 \tag{1}$$
$$xy^3 - 2y - 9 = ab^3 - 2b - 9 \tag{2}$$
$$\left(y^2-5\right)x = \left(b^2-5\right)a \tag{3}$$

Subtraktion von (1) und (2) und anschließendes Umformen ergibt $y = b$. Einsetzen in (3) und Division durch $y^2 - 5$ ($\neq 0$ für $y \in \mathbb{Z}$) liefert $x = a$;

Aufgabe 4a

$f(n)$ ist nicht surjektiv, da beispielsweise kein Urbild für $f(n) = 0$ existiert.

Aufgabe 4b

$f(n)$ ist nicht surjektiv, da beispielsweise $f(n) = \left(\star, 2\right)$ kein Urbild besitzt.

Aufgabe 4c

$f(n, m)$ ist surjektiv. Sei $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ das Bild von $f(n, m)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(n, m) &= (x, y) \\ (n + m - 2, n + 1) &= (x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n + m - 2 &= x \qquad (1) \\ n + 1 &= y \qquad (2) \end{aligned}$$

Aus (2) folgt direkt $n = y - 1$. Einsetzen in (1) liefert $m = x - y + 3$. Es gilt $(y - 1, x - y + 3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Abschließend muss noch geprüft werden, ob tatsächlich ein Urbild für (x, y) vorliegt:

$$\begin{aligned} f(y - 1, x - y + 3) &= (y - 1 + x - y + 3 - 2, y - 1 + 1) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

Aufgabe 4d

$f(n, m)$ ist surjektiv, da beispielsweise $(0, -y)$ ein Urbild für $f(n, m) = y$ ist:

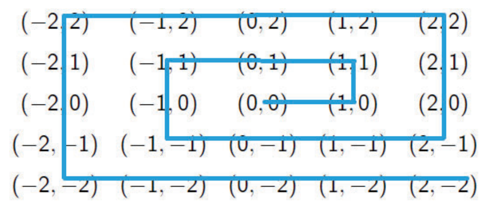
$$f(0, -y) = 7 \cdot 0 - (-y) = y.$$

Aufgabe 4e

$f(n, m)$ ist nicht surjektiv, da keine natürlichen Zahlen n, m mit $f(n, m) = 1$ existieren.

Aufgabe 5

Eine bijektive Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kann mithilfe des folgenden Schemas gefunden werden:



Hieraus lässt sich bspw. die folgende bijektive Abbildung erstellen:

$\mathbb{Z}$	0	1	−1	2	−2	3	−3	...
$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	(0, 0)	(1, 0)	(1, 1)	(0, 1)	(−1, 1)	(−1, 0)	(−1, −1)	...

Aufgabe 6

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1

Die Spalten für $A \Leftrightarrow B$ und $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ stimmen überein – die beiden Aussagen sind folglich äquivalent.