Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Bonusklausur am 15.11.2019
(Teil 2)

14. November 2019

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Vollständige Induktion

Vollständige Induktion I

Vollständige Induktion als Beweismethode wird bei Problemen der folgenden Art angewandt: Für jede natürliche Zahl n sei $A(n)$ eine Aussage. Es soll bewiesen werden, dass $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n gilt, d.h., es soll die Gültigkeit der unendlich vielen Aussagen $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$ ... nachgewiesen werden.

Vollständige Induktion II

Um eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen, genügt es, Folgendes zu zeigen:

(I) *Induktionsanfang*

$A(1)$ ist richtig.

(II) *Induktionsschritt*

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Falls $A(n)$ richtig ist, so ist auch die Aussage $A(n+1)$ richtig.

Vollständige Induktion III

Behauptung:

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen (d.h. $1 + 2 + \ldots + n$) ist gleich $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Vollständige Induktion IV

Beweis:

Mit vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass $A(n)$ nicht nur für bestimmte n, sondern für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(I) Induktionsanfang

$A(1)$ ist richtig, da $1 = \dfrac{1 \cdot (1+1)}{2}$ gilt.

Vollständige Induktion V

(II) Induktionsschritt

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebig gewählte natürliche Zahl; wir setzen voraus, dass $A(n)$ für dieses n richtig ist, d.h., es gelte (für dieses n):

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\left(n+1\right)}{2}\,. \qquad (\star)$$

Wir haben zu zeigen, dass unter dieser Voraussetzung auch $A(n+1)$ richtig ist, d.h., wir müssen Folgendes nachweisen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{\left(n+1\right)\left(\left(n+1\right)+1\right)}{2}\,.$$

Vollständige Induktion VI

Dies ergibt sich durch die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \\
&\overset{(\star)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&\overset{\text{Zusammenfassen}}{=} \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&\overset{(n+1)\text{ ausklammern}}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}
\end{aligned}$$

Damit sind (I) und (II) gezeigt; nach dem Induktionsprinzip gilt $A(n)$ also für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Aufgabe 1

Beweise durch vollständige Induktion!

a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $6 \mid \left(2n^3 + 3n^2 + n\right)$.

d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $8 \mid \left(3^{2n} + 7\right)$.

Aufgabe 2

Beweise durch vollständige Induktion!

a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\sum_{i=0}^{n} f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gilt: $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$.

d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 16$ gilt: $2^n > n^4$.

Viel Erfolg bei der Bonusklausur :)