

# Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Bonusklausur am 15.11.2019  
(Teil 2, Lösungen)

14. November 2019

# Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

## Aufgabe 1a I

(I) Induktionsanfang:

Für  $n = 0$  gilt  $\sum_{k=0}^0 2^k = 2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1$ . ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h.  $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$ .

## Aufgabe 1a II

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} 2^k &= \sum_{k=1}^n 2^k + 2^{n+1} \\ &= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1\end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.  $\square$

## Aufgabe 1b I

(I) Induktionsanfang:

Für  $n = 1$  gilt  $\sum_{i=1}^1 \frac{1}{(2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 1 + 1)} = \frac{1}{3}$  sowie  $\frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$ . ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h.  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$ .

## Aufgabe 1b II

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} \\ &= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{n+1}{2n+3}\end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.  $\square$

## Aufgabe 1c

(I) Induktionsanfang:

Für  $n = 1$  gilt  $2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 = 6$  und  $6 \mid 6$ . ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h.  $6 \mid (2n^3 + 3n^2 + n)$ . Es gilt:

$$\begin{aligned}2(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + (n+1) &= 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 3(n^2 + 2n + 1) + n + 1 \\&= 2n^3 + 9n^2 + 13n + 1 \\&= 2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6 \\&= (2n^3 + 3n^2 + n) + 6(n^2 + 2n + 1)\end{aligned}$$

Dieser Term ist offensichtlich durch 6 teilbar. Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. □

## Aufgabe 1d

(I) Induktionsanfang:

Für  $n = 1$  gilt  $3^{2 \cdot 1} + 7 = 16$  und  $8 \mid 16 (= 2 \cdot 8)$ . ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h.  $8 \mid (3^{2n} + 7)$ . Es gilt:

$$\begin{aligned}3^{2(n+1)} + 7 &= 3^{2n+2} + 7 \\&= 3^2 \cdot 3^{2n} + 7 \\&= 8 \cdot 3^{2n} + 3^{2n} + 7 \\&= 8 \cdot 3^{2n} + (3^{2n} + 7)\end{aligned}$$

Dieser Term ist offensichtlich durch 8 teilbar. Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. □



## Aufgabe 2a I

(I) Induktionsanfang:

Für  $n = 0$  gilt  $\sum_{i=0}^0 f_i^2 = f_0^2 = 0^2 = 0 \cdot 1$ . ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei  $n \in \mathbb{N}_0$  eine fest gewählte Zahl, für die die Behauptung gilt,  
d.h.  $\sum_{i=0}^n f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}$ .

## Aufgabe 2a II

Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} f_i^2 &= \sum_{i=0}^n f_i^2 + f_{n+1}^2 \\ &= f_n \cdot f_{n+1} + f_{n+1}^2 \\ &= f_{n+1} \cdot (f_n + f_{n+1}) \\ &= f_{n+1} \cdot f_{n+2}\end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt.  $\square$

## Aufgabe 2b I

(I) Induktionsanfang:

Für  $n = 0$  gilt  $\sum_{i=0}^0 q^i = q^0 = 1 = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$ . ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei  $n \in \mathbb{N}_0$  eine fest gewählte Zahl, für die die Behauptung gilt,  
d.h.  $\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ .

## Aufgabe 2b II

Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} q^i &= \sum_{i=0}^n q^i + q^{n+1} \\ &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} \\ &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + \frac{q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q} = \frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q}\end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt.  $\square$

## Aufgabe 2c

(I) Induktionsanfang:

Für  $n = 3$  gilt  $3 \cdot \sqrt{3} > 5 > 3 + \sqrt{3}$ . ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  eine fest gewählte natürliche Zahl mit  $n \geq 3$ , für die die Behauptung gilt, d.h.  $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$ . Es gilt:

$$\begin{aligned}(n+1) \cdot \sqrt{n+1} &= n \cdot \sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} \\ &> n \cdot \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \\ &> n + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \\ &> (n+1) + \sqrt{n+1}\end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. □

## Aufgabe 2d

(I) Induktionsanfang:

Für  $n = 17$  gilt  $2^{17} = 131.072 > 83.521 = 17^4$ . ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  eine fest gewählte natürliche Zahl mit  $n > 16$ , für die die Behauptung gilt, d.h.  $2^n > n^4$ . Es gilt:

$$\begin{aligned}2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n \\ &> n^4 + n^4 \\ &> n^4 + 15n^3 \\ &= n^4 + 4n^3 + 6n^3 + 4n^3 + n^3 \\ &> n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \\ &> (n+1)^4\end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. □