Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Bonusklausur am 15.11.2019
(Teil 2, Lösungen)

14. November 2019

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1a I

(I) Induktionsanfang:

Für $n = 0$ gilt $\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1$. ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h. $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.

Aufgabe 1a II

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} 2^k &= \sum_{k=1}^{n} 2^k + 2^{n+1} \\ &= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1\end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. □

Aufgabe 1b I

(I) Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt $\sum\limits_{i=1}^{1} \frac{1}{(2\cdot1-1)(2\cdot1+1)} = \frac{1}{3}$ sowie $\dfrac{1}{2\cdot1+1} = \dfrac{1}{3}$. ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h. $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

Aufgabe 1b II

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} \\
&= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{n+1}{2n+3}
\end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $\square$

Aufgabe 1c

(I) Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt $2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 = 6$ und $6 \mid 6$. ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h. $6 \mid \left(2n^3 + 3n^2 + n\right)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
2(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + (n+1) &= 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 3(n^2 + 2n + 1) + n + 1 \\
&= 2n^3 + 9n^2 + 13n + 1 \\
&= 2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6 \\
&= (2n^3 + 3n^2 + n) + 6(n^2 + 2n + 1)
\end{aligned}$$

Dieser Term ist offensichtlich durch 6 teilbar. Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $\square$

Aufgabe 1d

(I) Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt $3^{2\cdot 1} + 7 = 16$ und $8 \mid 16$ $(= 2 \cdot 8)$. ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h. $8 \mid \left(3^{2n} + 7\right)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
3^{2(n+1)} + 7 &= 3^{2n+2} + 7 \\
&= 3^2 \cdot 3^{2n} + 7 \\
&= 8 \cdot 3^{2n} + 3^{2n} + 7 \\
&= 8 \cdot 3^{2n} + \left(3^{2n} + 7\right)
\end{aligned}$$

Dieser Term ist offensichtlich durch 8 teilbar. Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $\square$

Aufgabe 2a I

(I) Induktionsanfang:

Für $n = 0$ gilt $\sum_{i=0}^{0} f_i^2 = f_0^2 = 0^2 = 0 \cdot 1.$ ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine fest gewählte Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h. $\sum_{i=0}^{n} f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}$.

Aufgabe 2a II

Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} f_i^2 &= \sum_{i=0}^{n} f_i^2 + f_{n+1}^2 \\ &= f_n \cdot f_{n+1} + f_{n+1}^2 \\ &= f_{n+1} \cdot \left(f_n + f_{n+1}\right) \\ &= f_{n+1} \cdot f_{n+2}\end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. $\square$

Aufgabe 2b I

(I) Induktionsanfang:

Für $n = 0$ gilt $\sum_{i=0}^{0} q^i = q^0 = 1 = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$. ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine fest gewählte Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h. $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Aufgabe 2b II

Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} q^i &= \sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1}\\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}\\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q}\\ &= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q}\\ &= \frac{1-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}\end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. □

Aufgabe 2c

<u>(I) Induktionsanfang:</u>

Für $n = 3$ gilt $3 \cdot \sqrt{3} > 5 > 3 + \sqrt{3}$. ✓

<u>(II) Induktionsschritt:</u>

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl mit $n \geq 3$, für die die Behauptung gilt, d.h. $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}(n+1) \cdot \sqrt{n+1} &= n \cdot \sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} \\ &> n \cdot \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \\ &> n + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \\ &> (n+1) + \sqrt{n+1}\end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. □

Aufgabe 2d

<u>(I) Induktionsanfang:</u>

Für $n = 17$ gilt $2^{17} = 131.072 > 83.521 = 17^4$. ✓

<u>(II) Induktionsschritt:</u>

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl mit $n > 16$, für die die Behauptung gilt, d.h. $2^n > n^4$. Es gilt:

$$\begin{aligned}2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n \\ &> n^4 + n^4 \\ &> n^4 + 15n^3 \\ &= n^4 + 4n^3 + 6n^3 + 4n^3 + n^3 \\ &> n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \\ &> (n+1)^4\end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. □