Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Bonusklausur am 17.01.2020
(Teil 1)

8. Januar 2020

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Relationen

Definition I

Bei einer *n-stelligen Relation* handelt es sich um eine Teilmenge des kartesischen Produkts der Mengen $A_1, \ldots, A_n$. Die Mengen $A_1, \ldots, A_n$ müssen hierbei nicht verschieden sein.

Bei einer *binären* oder *zweistelligen Relation* handelt es sich um eine Teilmenge

$$R \subseteq A_1 \times A_2.$$

Bei einer *binären* oder *zweistelligen Relation über der Menge A* handelt es sich um eine Teilmenge

$$R \subseteq A \times A.$$

Bei einer *ternären* oder *dreistelligen Relation* handelt es sich um eine Teilmenge

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3.$$

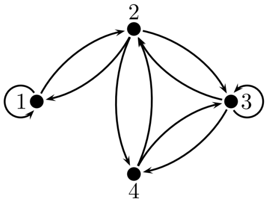
Definition II

Relationen können auf verschiedene Arten dargestellt werden, z.B. als Menge, als gerichtete Graphen oder mithilfe von Matrizen.

Es sei $A = \{1, 2, 3, 4\}$ eine Menge und $R \subseteq A \times A$ eine Relation über A:

$$R = \Big\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3)\Big\}$$

1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	1	1	0



Eigenschaften von Relationen I

Es sei R eine Relation über einer Menge A. Die Relation ist

- *symmetrisch*, falls gilt:

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R.$$

- *nicht symmetrisch*, falls gilt:

$$\exists a, b \in A : (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R.$$

- *antisymmetrisch*, falls gilt:

$$\forall a, b \in A, a \neq b : (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R.$$

- *nicht antisymmetrisch*, falls gilt:

$$\exists a, b \in A, a \neq b : (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R.$$

Eigenschaften von Relationen II

Es sei R eine Relation über einer Menge A. Die Relation ist

- *reflexiv*, falls gilt:

$$\forall a \in A : (a, a) \in R.$$

- *nicht reflexiv*, falls gilt:

$$\exists a \in A : (a, a) \notin R.$$

- *irreflexiv*, falls gilt:

$$\forall a \in A : (a, a) \notin R.$$

- *nicht irreflexiv*, falls gilt:

$$\exists a \in A : (a, a) \in R.$$

Eigenschaften von Relationen III

Es sei R eine Relation über einer Menge A. Die Relation ist

- *transitiv*, falls gilt:

$$\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \land (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R.$$

- *intransitiv*, falls gilt:

$$\exists a, b, c \in A : (a, b) \in R \land (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \notin R.$$

- *antitransitiv*, falls gilt:

$$\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \land (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \notin R.$$

Aufgabe 1

Es sei R die folgende auf der Menge $A = \{a, b, c, d\}$ definierte Relation:

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, a), (d, a), (b, a), (a, d), (d, d)\}.$$

Entscheide, welche der folgenden Eigenschaften auf die Relation zutreffen. Gib jeweils eine kurze Begründung.

(i) symmetrisch

(ii) antisymmetrisch

(iii) reflexiv

(iv) irreflexiv

(v) transitiv

Aufgabe 2

Es sei $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Gib eine Relation R_a über der Menge A an, die reflexiv, aber nicht transitiv ist.

b) Gib eine Relation R_b über der Menge A an, die symmetrisch, transitiv und nicht irreflexiv ist.

c) Gib eine Relation R_c über der Menge A an, die irreflexiv und weder symmetrisch noch antisymmetrisch ist. Dabei soll $|R_c| \geq 5$ gelten.

d) Gib eine Relation R_d über der Menge A an, die sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch ist.

Äquivalenzrelation I

Man nennt eine Relation R über einer Menge A eine *Äquivalenzrelation*, falls gilt:

R ist symmetrisch, reflexiv und transitiv.

Äquivalenzrelation II

Zu jeder Äquivalenzrelation gehört eine eindeutig bestimmte *Partition*, die die Menge A in nichtleere, disjunkte Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$ aufteilt, so dass gilt:

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (\text{für } i \neq j).$$

Bei den Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$ handelt es sich um die *Äquivalenzklassen* der Relation.

- Stehen zwei Elemente in Relation, so sind sie in derselben Äquivalenzklasse.
- Elemente aus verschiedenen Äquivalenzklassen stehen niemals in Relation.

Ordnungsrelation I

Man nennt eine Relation R über einer Menge A eine *Ordnungsrelation*, falls gilt:

R ist antisymmetrisch, reflexiv und transitiv.

Ordnungsrelation II

Bei einem *Hasse-Diagramm* handelt es sich um eine Möglichkeit, eine Ordnungsrelation grafisch darzustellen. Für die bessere Übersichtlichkeit gilt:

- Kanten sind stets nach oben gerichtet, Pfeilspitzen werden weggelassen;
- reflexive Kanten werden nicht aufgezeichnet;
- transitive Kanten werden nicht aufgezeichnet.

Aufgabe 3

Sei $A = \{a, b, c\}$. Auf der Menge $\mathcal{P}(A)$ betrachtet man die Inklusion $\subseteq$, also die Relation

$$\Big\{(X, Y) : X, Y \in \mathcal{P}(A) \wedge X \subseteq Y\Big\}.$$

Stelle $\subseteq$ auf $\mathcal{P}(A)$ als Hasse-Diagramm dar.

Reflexive Hülle I

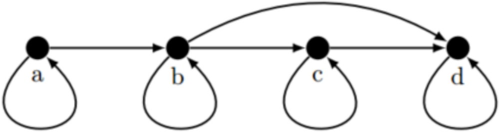
Gegeben sei eine Relation R über einer Menge A. Falls R nicht reflexiv ist, so kann man R in eine reflexive Relation R' überführen, indem man für alle $a \in A$ das Paar (a, a) zu R hinzufügt:

$$R' = R \cup \Big\{(a, a) : a \in A\Big\}.$$

R' ist hierbei die kleinste reflexive Relation, die R umfasst. Man bezeichnet R' als *reflexive Hülle* von R.

Reflexive Hülle II

Relation R



reflexive Hülle R'

Transitive Hülle I

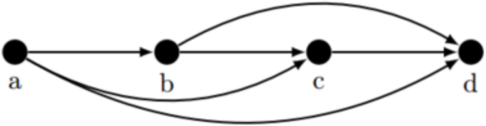
Gegeben sei eine Relation R über einer Menge A. Falls R nicht transitiv ist, so kann man R in eine transitive Relation R^+ überführen, indem man für $a, b, c \in A$ mit $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ das Paar (a, c) zu R hinzufügt und dies solange wiederholt, bis keine weiteren Kanten mehr hinzugefügt werden können.

$$\begin{aligned} R^+ = R \cup \Big\{ (a, b) : &\text{ Es gibt } n \geq 2 \text{ und} \\ & a_1, \ldots, a_n \in A \text{ mit } a_1 = a,\ a_n = b \\ & \text{und } (a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_{n-1}, a_n) \in R. \Big\} \end{aligned}$$

R^+ ist hierbei die kleinste transitive Relation, die R umfasst. Man bezeichnet R^+ als *transitive Hülle* von R.

Transitive Hülle II

Relation R



transitive Hülle R^+

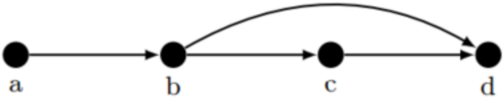
Reflexive, transitive Hülle I

Gegeben sei eine Relation R auf einer Menge A. Man nennt die Relation

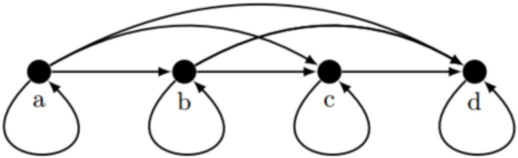
$$R^* = R^+ \cup R'$$

die *reflexive, transitive Hülle* von R. Bei R^* handelt es sich um die kleinste reflexive und transitive Relation, die R umfasst.

Reflexive, transitive Hülle II



Relation R



reflexive, transitive Hülle R^*

Elementare Kombinatorik

Additions- und Multiplikationsregel

- *Additionsregel*: M sei eine endliche Menge und $M_1, \ldots, M_n$ seien disjunkte Teilmengen von M mit $M = M_1 \cup \ldots \cup M_n$. Dann gilt:
$$|M| = \sum_{i=1}^{n} |M_i|$$
- *Multiplikationsregel*: Seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Dann gilt
$$|A_1 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Fakultät und Faktorielle

- Mithilfe der *Fakultät* kann bspw. die Anzahl der *Permutationen* einer n-elementigen Menge bestimmt werden. Es gilt:

$$n! := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

- Mithilfe der *k-ten Faktoriellen von n* kann die Anzahl der k-Tupel einer n-elementigen Menge berechnet werden, wobei kein Element doppelt vorkommen darf. Es gilt:

$$n^{\underline{k}} := \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) & \text{, falls } k \geq 1 \\ 1 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 4

Es seien $A = \{a_1, \dots, a_7\}$ und $B = \{b_1, \dots, b_9\}$ zwei Mengen mit $|A| = 7$ und $|B| = 9$.

a) Wie viele Abbildungen $A \to B$ gibt es?

b) Wie viele dieser Abbildungen sind injektiv?

c) Wie viele dieser Abbildungen sind surjektiv?

d) Wie viele dieser Abbildungen sind injektiv, wenn zudem $f(a_1) = f(a_3)$ gelten soll?

e) Wie viele dieser Abbildungen sind injektiv, wenn zudem $f(a_1) \neq f(a_2)$ gelten soll?

f) Wie viele Abbildungen gibt es, für die $f(a_1) \neq f(a_2)$ sowie $f(a_1) \neq f(a_3)$ gilt?

Binomialkoeffizienten & Binomischer Lehrsatz

Es gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad \text{(explizite Formel)}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad \text{(Rekursionsformel)}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \text{(Symmetrie)}$$

Binomischer Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

Pascalsches Dreieck I

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

$$\vdots$$

Pascalsches Dreieck II

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 \\
 & & & & & & & & \vdots & & & & & & & &
\end{array}
$$

Aufgabe 5 a-c

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, im Lotto exakt 3 richtige Gewinnzahlen anzukreuzen?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, im Lotto mindestens 5 richtige Gewinnzahlen anzukreuzen?

c) Welchen Koeffizienten besitzt $a^6 b^3$ in $(a+b)^9$?

Aufgabe 5 d-g

d) Wie viele sinnvolle oder sinnlose Wörter lassen sich aus den Buchstaben des Wortes *RHABARBERBARBARA* bilden?

e) Für $k, n \in \mathbb{N}$: Wie viele Möglichkeiten gibt es, insgesamt n nicht unterscheidbare Bonbons auf k Kinder zu verteilen?

f) Für $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2k$: Wie viele Möglichkeiten gibt es, insgesamt n nicht unterscheidbare Bonbons auf k Kinder zu verteilen, so dass jedes Kind mindestens zwei Bonbons bekommt?

g) Welchen Koeffizienten besitzt $x^2yz^5w^5$ in $\left(x+y+z+w\right)^{13}$?

Aufgabe 6

Begründe, wieso eine n-elementige Menge M genau 2^n verschiedene Teilmengen besitzt.

Aufgabe 7

Zeige mit vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage gilt:

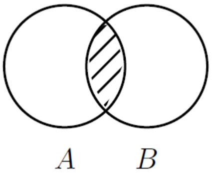
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

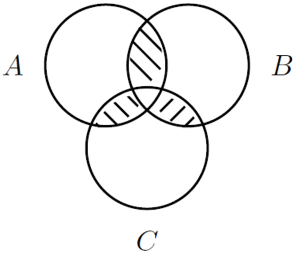
Das Prinzip der Inklusion und Exklusion (Siebformel) I

Mithilfe der *Siebformel* kann die Anzahl der Elemente

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n|$$

in der Vereinigung von n nicht-disjunkten Mengen $A_1, \ldots, A_n$ bestimmt werden.





Das Prinzip der Inklusion und Exklusion (Siebformel) II

Für endliche Mengen $A_1, \ldots, A_n$ gilt:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r}|.$$

Aufgabe 8

Berechne mithilfe der Siebformel, wie viele ganze Zahlen n mit $1 \leq n < 42$ teilerfremd zur Zahl 42 sind.

Graphentheorie

Ungerichteter Graph

Bei einem *ungerichteten Graphen* G handelt es sich um ein Paar $G = (V, E)$:

- V ist die *Knotenmenge* des Graphen;
- E ist die *Kantenmenge* des Graphen

$$E \subseteq \Big\{\{x, y\} : x, y \in V, x \neq y\Big\}.$$

Ungerichteter Multigraph

Bei einem *ungerichteten Mutligraphen* G handelt es sich um ein Tripel $G = (V, E, f)$:

- V ist die *Knotenmenge* des Graphen;
- E ist die *Kantenmenge* des Graphen;
- f ist eine Abbildung, die jedem Element von E eine ein- oder zweielementige Teilmenge von V zuordnet.

Kanten mit demselben Start- und Endknoten heißen *Schlingen*. Existieren Kanten $e_1, e_2 \in E$ mit $f(e_1) = f(e_2)$, so handelt es sich um *Mehrfachkanten*.

Gerichteter Graph

Bei einem *gerichteten Graphen* G handelt es sich um ein Paar $G = (V, E)$:

- V ist die *Knotenmenge* des Graphen;
- E ist die *Kantenmenge* des Graphen

$$E \subseteq \Big\{ (x, y) : x, y \in V \Big\} = V \times V.$$

Grad eines Knotens

Unter dem *Grad* $d(v)$ eines Knotens v versteht man die Anzahl der zu v inzidenten Kanten.

Es gilt stets (*Handshaking Lemma*):

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|.$$

Aufgabe 9

Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Der Graph H_n sei wie folgt definiert: Die Knotenmenge von H_n sei die Menge aller n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in \{0, 1, 2\}$ (für $i = 1, \ldots, n$). Zwei Knoten seien genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie sich an genau 2 Stellen unterscheiden.

a) Wie viele Knoten besitzt der Graph H_n?

b) Wie viele Kanten besitzt der Graph H_n?

Zusammenhang eines Graphen I

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *zusammenhängend*, falls es für alle Knoten $v, w \in V$ einen ungerichteten Weg von v nach w gibt.

Einen maximal zusammenhängenden Teilgraphen nennt man *Komponente* oder auch *Zusammenhangskomponente*. Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten eines Graphen G wird mit $c(G)$ bezeichnet.

Zusammenhang eines Graphen II

Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *(stark) zusammenhängend von einem Knoten v aus*, falls es für alle Knoten $w \in V$ einen gerichteten Weg von v nach w gibt.

Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *stark zusammenhängend*, falls G von jedem Knoten $v \in V$ aus stark zusammenhängend ist.

Ein gerichteter Graph G heißt *schwach zusammenhängend*, falls der zugehörige ungerichtete Graph zusammenhängend ist.

Eulersche Linie I

G sei ein zusammenhängender Graph oder Multigraph. Man nennt einen Kantenzug in G eine *eulersche Linie*, falls er geschlossen ist und sämtliche Kanten von G durchläuft.

Eulersche Linie II

Für jeden zusammenhängenden Graphen oder Multigraphen G gilt: G hat genau dann eine eulersche Linie, wenn der Grad jedes Knotens gerade ist. (notwendig und hinreichend)

Hamiltonkreis I

G sei ein Graph und C sei ein Kreis in G. Man nennt C einen *Hamiltonschen Kreis* (oder auch *Hamiltonkreis*), wenn C sämtliche Knoten von G enthält.

Hamiltonkreis II

Hat ein Graph $G = (V, E)$ einen Hamiltonkreis, so gilt für alle $A \subseteq V$ stets $c(G - A) \leq |A|$. (notwendig)

Gilt $d(v) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ für alle $v \in V$, so besitzt der Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ einen Hamiltonkreis. (*Satz von Dirac*, hinreichend)

Gilt $d(v) + d(u) \geq n$ für alle nichtadjazenten Knoten $u, v \in V$, so besitzt der Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ einen Hamiltonkreis. (*Satz von Ore*, hinreichend)

Aufgabe 10

Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Der ungerichtete Graph H bestehe aus zwei Zusammenhangskomponenten H_1 und H_2. Der Teilgraph H_1 sei ein vollständiger Graph mit n Knoten, der Teilgraph H_2 sei ein Baum mit n Knoten. Der Graph G entsteht aus H dadurch, dass man weitere Kanten wie folgt zu H hinzufügt: Man verbindet jeden Knoten von H_1 mit jedem Knoten von H_2 durch eine Kante.

a) Wie viele Kanten besitzt der Graph G?

b) Besitzt der Graph G einen Hamiltonkreis? Gib eine kurze Begründung.

c) Begründe, weshalb der Graph G im Allgemeinen keine eulersche Linie besitzt.

Aufgabe 11

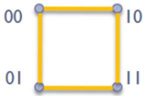
Unter einem *Hyperwürfel* Q_n versteht man den folgenden Graphen: Knotenmenge von Q_n ist die Menge aller n-Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ mit $x_i \in \{0, 1\}$ für $i = 1, \dots, n$. Zwei Knoten von Q_n sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sich die entsprechenden n-Tupel an genau einer Stelle unterscheiden.

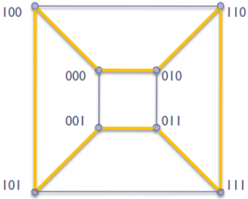
Beweise durch vollständige Induktion, dass der Hyperwürfel Q_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ einen Hamiltonkreis besitzt.

Aufgabe 11 – Lösung I

Induktionsanfang:

Die Hyperwürfel Q_2 und Q_3 besitzen Hamiltonkreise.





Aufgabe 11 – Lösung II

Induktionsannahme:

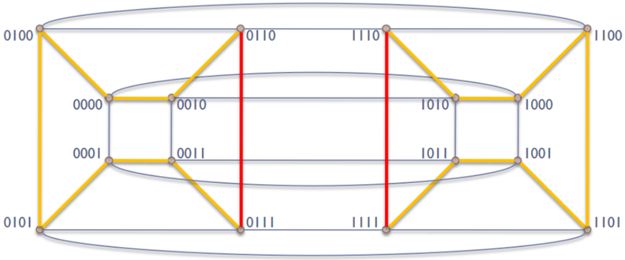
Für ein fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$ besitzt der Hyperwürfel Q_n einen Hamiltonkreis.

Induktionsschritt:

Der Hyperwürfel Q_{n+1} entsteht aus Q_n, indem man Q_n verdoppelt (und die Kopie spiegelt), die mit den Knoten assoziierten Tupel um 0 bzw. 1 ergänzt und die entsprechenden Verbindungskanten hinzufügt.

Aufgabe 11 – Lösung III

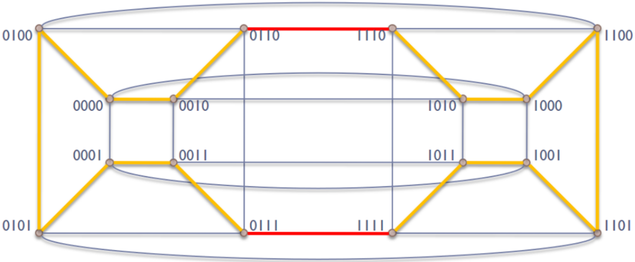
Demonstration am Beispiel von Q_4:



Die orangenen (bzw. roten) Kanten sind die Hamiltonkreise der beiden enthaltenen Hyperwürfel Q_3. Die beiden roten Kanten werden aus den Hamiltonkreisen „entfernt", die orangenen Kantenzüge werden neu verbunden.

Aufgabe 11 – Lösung IV

Es entsteht der Hamiltonkreis des Q_4:



Auf analoge Art lässt sich ein Hamiltonkreis für jeden Hyperwürfel Q_{n+1} aus den (nach der Induktionsannahme existierenden) Hamiltonkreisen der beiden Hyperwürfel Q_n konstruieren. $\square$

Aufgabe 12

Wahr oder falsch? Gib jeweils eine (kurze) Begründung.

(i) Jeder vollständige Graph besitzt einen Hamiltonkreis.

(ii) In einem Graphen ist die Summe aller Knotengrade stets gerade.

(iii) Ein ungerichteter Graph besitzt genau dann eine eulersche Linie, wenn jeder Knoten einen geraden Grad besitzt.

(iv) Es existiert kein ungerichteter Graph mit n Knoten und n^2 Kanten.

(v) Das „Haus des Nikolaus“ besitzt eine eulersche Linie.

(vi) Es sei $G = (V, E)$. Gilt $c(G - A) < |A|$ für alle Teilmengen $A \subseteq V$, so besitzt der Graph G einen Hamiltonkreis.

Isomorphie

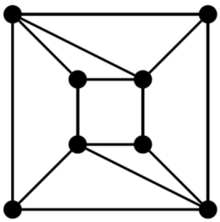
Zwei Graphen G und H heißen *isomorph* (oder *strukturgleich*), wenn es eine bijektive Abbildung φ gibt, die die Knoten von G auf die Knoten von H abbildet, so dass gilt:

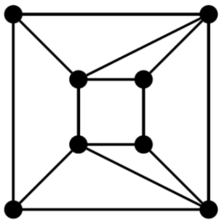
$$\forall u, v \in V(G) : \{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E(H).$$

Die Abbildung φ heißt *Isomorphismus*.

Aufgabe 13

Sind die folgenden beiden Graphen isomorph? Gib eine (kurze) Begründung für deine Antwort!





Aufgabe 14

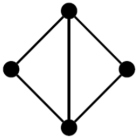
G sei ein vollständiger Graph mit genau 8 Knoten.

a) Wie viele Kanten hat G?

b) Wie viele verschiedene Kreise der Länge 3 enthält G?

c) Wie viele verschiedene Kreise der Länge 4 enthält G?

d) Wie viele verschiedene Teilgraphen, die isomorph zum abgebildeten Graphen sind, enthält G?



Tiefensuche I

1. Markiere den Knoten v und setze $a := v$. In diesem Schritt sei B der Baum, dessen einziger Knoten die Wurzel v ist.
2. Falls es einen unmarkierten Knoten $u \in V$ gibt, so dass $(a, u) \in E$ gilt, so wählte ein solches u, füge u und die Kante (a, u) zum Baum B hinzu, markiere u und setze $a := u$. Diesen Schritt bezeichnet man als den *Vorwärtsschritt* (*advance step*).

Tiefensuche II

3. Falls es keinen unmarkierten Knoten $u \in V$ gibt, so dass $(a, u) \in E$ gilt, und falls a nicht die Wurzel von B ist, so geht man zurück zum Vater w von a in B und setzt $a := w$. Diesen Schritt bezeichnet man als den *Rückwärtsschritt* (*back-tracking step*). Nun fährt man mit Schritt (2) fort.
4. Falls es keinen unmarkierten Knoten $u \in V$ gibt, so dass $(a, u) \in E$ gilt, und falls a die Wurzel von B ist, so endet der Algorithmus. Die von v aus erreichbaren Knoten sind genau die markierten Knoten. Das sind auch genau die Knoten von B.

Breitensuche I

1. Markiere den Knoten v und setze $a := v$. In diesem Schritt sei B der Baum, dessen einziger Knoten die Wurzel v ist.
2. Falls es einen unmarkierten Knoten $u \in V$ gibt, so dass $(a, u) \in E$ gilt, so wähle ein solches u, füge u und die Kante (a, u) zum Baum B hinzu und markiere u. Im Unterschied zur Tiefensuche bleibt in diesem Schritt der ursprüngliche Knoten a der aktuelle Knoten.

Breitensuche II

3. Falls es keinen unmarkierten Knoten $u \in V$ gibt, so dass $(a, u) \in E$ gilt, und falls es einen Knoten b in B gibt, von dem aus es eine Kante (b, u) zu einem unmarkierten Knoten u gibt, so wähle aus allen solchen Knoten b denjenigen aus, der schon am längsten im Baum B ist und setze $a := b$. Der Knoten b wird also der neue aktuelle Knoten und der Algorithmus fährt mit Schritt (2) fort.
4. Falls es keine Kante (a, u) vom aktuellen Knoten zu einem unmarkierten Knoten gibt und auch kein Knoten b in B existiert, der zu einem unmarkierten Knoten benachbart ist, so stoppt der Algorithmus.

Aufgabe 15

Führe für den folgenden Graphen G eine Breiten- sowie eine Tiefensuche durch. In beiden Fällen soll der Knoten a als Startknoten gewählt werden. Stelle den jeweils erhaltenen Baum in einer Zeichnung dar. Gibt es mehrere Möglichkeiten, einen Nachbarknoten auszuwählen, so entscheidet die alphabetische Reihenfolge.