

# Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Bonusklausur am 17.01.2020  
(Teil 1)

8. Januar 2020

# Relationen

## Definition I

Bei einer *n*-stelligen Relation handelt es sich um eine Teilmenge des kartesischen Produkts der Mengen  $A_1, \dots, A_n$ . Die Mengen  $A_1, \dots, A_n$  müssen hierbei nicht verschieden sein.

Bei einer *binären* oder *zweistelligen Relation* handelt es sich um eine Teilmenge

$$R \subseteq A_1 \times A_2.$$

Bei einer *binären* oder *zweistelligen Relation über der Menge A* handelt es sich um eine Teilmenge

$$R \subseteq A \times A.$$

Bei einer *ternären* oder *dreistelligen Relation* handelt es sich um eine Teilmenge

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3.$$

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

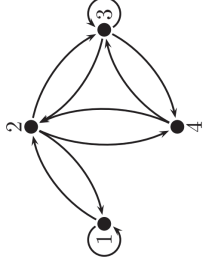
## Definition II

Relationen können auf verschiedene Arten dargestellt werden, z.B. als Menge, als gerichtete Graphen oder mithilfe von Matrizen.

Es sei  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  eine Menge und  $R \subseteq A \times A$  eine Relation über  $A$ :

$$R = \left\{ (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 2), (4, 3) \right\}$$

1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	1	1	0



## Eigenschaften von Relationen II

Es sei  $R$  eine Relation über einer Menge  $A$ . Die Relation ist

- ▶ *reflexiv*, falls gilt:  
 $\forall a \in A : (a, a) \in R.$
- ▶ *nicht reflexiv*, falls gilt:  
 $\exists a \in A : (a, a) \notin R.$
- ▶ *irreflexiv*, falls gilt:  
 $\forall a \in A : (a, a) \notin R.$
- ▶ *nicht irreflexiv*, falls gilt:  
 $\exists a \in A : (a, a) \in R.$

## Eigenschaften von Relationen I

Es sei  $R$  eine Relation über einer Menge  $A$ . Die Relation ist

- ▶ *symmetrisch*, falls gilt:  
 $\forall a, b \in A : (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R.$
- ▶ *nicht symmetrisch*, falls gilt:  
 $\exists a, b \in A : (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R.$
- ▶ *antisymmetrisch*, falls gilt:  
 $\forall a, b \in A, a \neq b : (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R.$
- ▶ *nicht antisymmetrisch*, falls gilt:  
 $\exists a, b \in A, a \neq b : (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R.$

## Eigenschaften von Relationen III

Es sei  $R$  eine Relation über einer Menge  $A$ . Die Relation ist

- ▶ *transitiv*, falls gilt:  
 $\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R.$
- ▶ *intransitiv*, falls gilt:  
 $\exists a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \notin R.$
- ▶ *antitransitiv*, falls gilt:  
 $\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \notin R.$

## Aufgabe 1

Es sei  $R$  die folgende auf der Menge  $A = \{a, b, c, d\}$  definierte Relation:

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, a), (d, a), (b, a), (a, d), (d, d)\}.$$

Entscheide, welche der folgenden Eigenschaften auf die Relation zutreffen. Gib jeweils eine kurze Begründung.

- (i) symmetrisch
- (ii) antisymmetrisch
- (iii) reflexiv
- (iv) irreflexiv
- (v) transitiv

&gt;&gt; 9

## Äquivalenzrelation I

Man nennt eine Relation  $R$  über einer Menge  $A$  eine *Äquivalenzrelation*, falls gilt:

$R$  ist symmetrisch, reflexiv und transitiv.

&gt;&gt; 11

## Aufgabe 2

Es sei  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .

- a) Gib eine Relation  $R_a$  über der Menge  $A$  an, die reflexiv, aber nicht transitiv ist.
- b) Gib eine Relation  $R_b$  über der Menge  $A$  an, die symmetrisch, transitiv und nicht irreflexiv ist.
- c) Gib eine Relation  $R_c$  über der Menge  $A$  an, die irreflexiv und weder symmetrisch noch antisymmetrisch ist. Dabei soll  $|R_c| \geq 5$  gelten.
- d) Gib eine Relation  $R_d$  über der Menge  $A$  an, die sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch ist.

&gt;&gt; 10

## Äquivalenzrelation II

Zu jeder Äquivalenzrelation gehört eine eindeutig bestimmte *Partition*, die die Menge  $A$  in nichtleere, disjunkte Teilmengen  $A_1, \dots, A_n$  aufteilt, so dass gilt:

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_n$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (\text{für } i \neq j).$$

Bei den Teilmengen  $A_1, \dots, A_n$  handelt es sich um die *Äquivalenzklassen* der Relation.

- ▶ Stehen zwei Elemente in Relation, so sind sie in derselben Äquivalenzklasse.
- ▶ Elemente aus verschiedenen Äquivalenzklassen stehen niemals in Relation.

&gt;&gt; 12

## Ordnungsrelation I

Man nennt eine Relation  $R$  über einer Menge  $A$  eine *Ordnungsrelation*, falls gilt:

$R$  ist antisymmetrisch, reflexiv und transitiv.

## Aufgabe 3

Sei  $A = \{a, b, c\}$ . Auf der Menge  $\mathcal{P}(A)$  betrachtet man die Inklusion  $\subseteq$ , also die Relation

$$\{(X, Y) : X, Y \in \mathcal{P}(A) \wedge X \subseteq Y\}.$$

Stelle  $\subseteq$  auf  $\mathcal{P}(A)$  als Hasse-Diagramm dar.

## Ordnungsrelation II

Bei einem *Hasse-Diagramm* handelt es sich um eine Möglichkeit, eine Ordnungsrelation grafisch darzustellen. Für die bessere Übersichtlichkeit gilt:

- ▶ Kanten sind stets nach oben gerichtet, Pfeilspitzen werden weggelassen;
- ▶ reflexive Kanten werden nicht aufgezeichnet;
- ▶ transitive Kanten werden nicht aufgezeichnet.

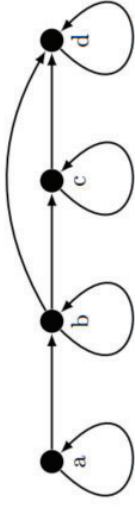
## Reflexive Hülle I

Gegeben sei eine Relation  $R$  über einer Menge  $A$ . Falls  $R$  nicht reflexiv ist, so kann man  $R$  in eine reflexive Relation  $R'$  überführen, indem man für alle  $a \in A$  das Paar  $(a, a)$  zu  $R$  hinzufügt:

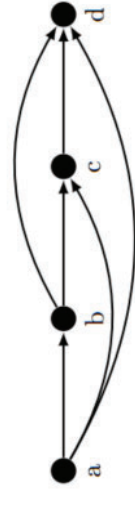
$$R' = R \cup \{(a, a) : a \in A\}.$$

$R'$  ist hierbei die kleinste reflexive Relation, die  $R$  umfasst. Man bezeichnet  $R'$  als *reflexive Hülle* von  $R$ .

## Reflexive Hülle II

Relation  $R$ reflexive Hülle  $R'$ 

## Transitive Hülle II

Relation  $R$ transitive Hülle  $R^+$ 

## Transitive Hülle I

Gegeben sei eine Relation  $R$  über einer Menge  $A$ . Falls  $R$  nicht transitiv ist, so kann man  $R$  in eine transitive Relation  $R^+$  überführen, indem man für  $a, b, c \in A$  mit  $(a, b) \in R$  und  $(b, c) \in R$  das Paar  $(a, c)$  zu  $R$  hinzufügt und dies solange wiederholt, bis keine weiteren Kanten mehr hinzugefügt werden können.

$R^+ = R \cup \{(a, b) : \text{Es gibt } n \geq 2 \text{ und}$

$a_1, \dots, a_n \in A \text{ mit } a_1 = a, a_n = b$

und  $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{n-1}, a_n) \in R.\}$

$R^+$  ist hierbei die kleinste transitive Relation, die  $R$  umfasst. Man bezeichnet  $R^+$  als *transitive Hülle* von  $R$ .

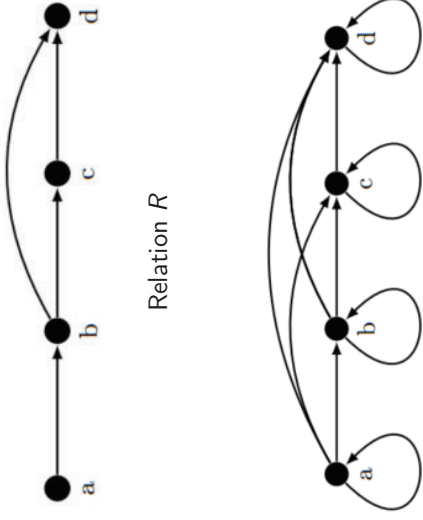
## Reflexive, transitive Hülle I

Gegeben sei eine Relation  $R$  auf einer Menge  $A$ . Man nennt die Relation

$$R^* = R^+ \cup R'$$

die *reflexive, transitive Hülle* von  $R$ . Bei  $R^*$  handelt es sich um die kleinste reflexive und transitive Relation, die  $R$  umfasst.

## Reflexive, transitive Hülle II



reflexive, transitive Hülle  $R^*$

## Additions- und Multiplikationsregel

- ▶ **Additionsregel:**  $M$  sei eine endliche Menge und  $M_1, \dots, M_n$  seien disjunkte Teilmengen von  $M$  mit  $M = M_1 \cup \dots \cup M_n$ . Dann gilt:

$$|M| = \sum_{i=1}^n |M_i|$$

- ▶ **Multiplikationsregel:** Seien  $A_1, \dots, A_n$  endliche Mengen. Dann gilt

$$|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_n| = \prod_{i=1}^n |A_i|.$$

## Elementare Kombinatorik

## Fakultät und Faktorielle

- ▶ Mithilfe der **Fakultät** kann bspw. die Anzahl der *Permutationen* einer  $n$ -elementigen Menge bestimmt werden. Es gilt:

$$n! := n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

- ▶ Mithilfe der  $k$ -ten *Faktoriellen* von  $n$  kann die Anzahl der  $k$ -Tupel einer  $n$ -elementigen Menge berechnet werden, wobei kein Element doppelt vorkommen darf. Es gilt:

$$n^{\underline{k}} := \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1), & \text{falls } k \geq 1 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$



## Aufgabe 5 a-c

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, im Lotto exakt 3 richtige Gewinnzahlen anzukreuzen?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, im Lotto mindestens 5 richtige Gewinnzahlen anzukreuzen?
- Welchen Koeffizienten besitzt  $a^6b^3$  in  $(a + b)^9$ ?

&gt;&gt; 29

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 6

Begründe, wieso eine  $n$ -elementige Menge  $M$  genau  $2^n$  verschiedene Teilmengen besitzt.

&gt;&gt; 31

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 5 d-g

- Wie viele sinnvolle oder sinnlose Wörter lassen sich aus den Buchstaben des Wortes *RHABARBERBARBARA* bilden?
- Für  $k, n \in \mathbb{N}$ : Wie viele Möglichkeiten gibt es, insgesamt  $n$  nicht unterscheidbare Bonbons auf  $k$  Kinder zu verteilen?
- Für  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2k$ : Wie viele Möglichkeiten gibt es, insgesamt  $n$  nicht unterscheidbare Bonbons auf  $k$  Kinder zu verteilen, so dass jedes Kind mindestens zwei Bonbons bekommt?
- Welchen Koeffizienten besitzt  $x^2yz^5w^5$  in  $(x + y + z + w)^{13}$ ?

&gt;&gt; 30

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 7

Zeige mit vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage gilt:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n.$$

&gt;&gt; 32

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

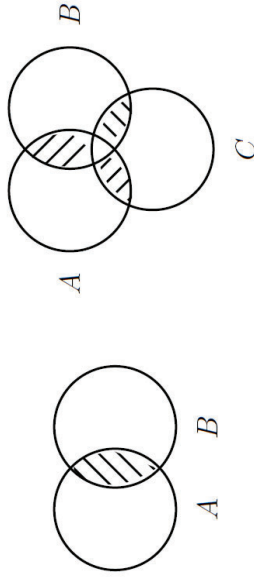


## Das Prinzip der Inklusion und Exklusion (Siebformel) I

Mithilfe der *Siebformel* kann die Anzahl der Elemente

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n|$$

in der Vereinigung von  $n$  nicht-disjunkten Mengen  $A_1, \dots, A_n$  bestimmt werden.



&gt;&gt; 33

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 8

Berechne mithilfe der Siebformel, wie viele ganze Zahlen  $n$  mit  $1 \leq n < 42$  teilerfremd zur Zahl 42 sind.

&gt;&gt; 35

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Das Prinzip der Inklusion und Exklusion (Siebformel) II

Für endliche Mengen  $A_1, \dots, A_n$  gilt:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}|.$$

# Graphentheorie

&gt;&gt; 34

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

&gt;&gt; 36

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Ungerichteter Graph

Bei einem *ungerichteten Graphen*  $G$  handelt es sich um ein Paar  $G = (V, E)$ :

- ▶  $V$  ist die *Knotenmenge* des Graphen;
- ▶  $E$  ist die *Kantenmenge* des Graphen

$$E \subseteq \{ \{x, y\} : x, y \in V, x \neq y \}.$$

&gt;&gt; 37

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Gerichteter Graph

Bei einem *gerichteten Graphen*  $G$  handelt es sich um ein Paar  $G = (V, E)$ :

- ▶  $V$  ist die *Knotenmenge* des Graphen;
- ▶  $E$  ist die *Kantenmenge* des Graphen

$$E \subseteq \{ (x, y) : x, y \in V \} = V \times V.$$

&gt;&gt; 39

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Ungerichteter Multigraph

Bei einem *ungerichteten Multigraphen*  $G$  handelt es sich um ein Tripel  $G = (V, E, f)$ :

- ▶  $V$  ist die *Knotenmenge* des Graphen;
- ▶  $E$  ist die *Kantenmenge* des Graphen;
- ▶  $f$  ist eine Abbildung, die jedem Element von  $E$  eine ein- oder zweielementige Teilmenge von  $V$  zuordnet.

Kanten mit demselben Start- und Endknoten heißen *Schlingen*. Existieren Kanten  $e_1, e_2 \in E$  mit  $f(e_1) = f(e_2)$ , so handelt es sich um *Mehrfachkanten*.

&gt;&gt; 38

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Grad eines Knotens

Unter dem *Grad*  $d(v)$  eines Knotens  $v$  versteht man die Anzahl der zu  $v$  inzidenten Kanten.

Es gilt stets (*Handshaking Lemma*):

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|.$$

&gt;&gt; 40

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 9

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ . Der Graph  $H_n$  sei wie folgt definiert: Die Knotenmenge von  $H_n$  sei die Menge aller  $n$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_n)$  mit  $x_i \in \{0, 1, 2\}$  (für  $i = 1, \dots, n$ ). Zwei Knoten seien genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie sich an genau 2 Stellen unterscheiden.

- Wie viele Knoten besitzt der Graph  $H_n$ ?
- Wie viele Kanten besitzt der Graph  $H_n$ ?

» 41

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Zusammenhang eines Graphen II

Ein gerichteter Graph  $G = (V, E)$  heißt (*stark*) *zusammenhängend* von einem Knoten  $v$  aus, falls es für alle Knoten  $w \in V$  einen gerichteten Weg von  $v$  nach  $w$  gibt.

Ein gerichteter Graph  $G = (V, E)$  heißt *stark zusammenhängend*, falls  $G$  von jedem Knoten  $v \in V$  aus stark zusammenhängend ist.

Ein gerichteter Graph  $G$  heißt *schwach zusammenhängend*, falls der zugehörige ungerichtete Graph zusammenhängend ist.

» 43

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Zusammenhang eines Graphen I

Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  heißt *zusammenhängend*, falls es für alle Knoten  $v, w \in V$  einen ungerichteten Weg von  $v$  nach  $w$  gibt.

Einen maximal zusammenhängenden Teilgraphen nennt man *Komponente* oder auch *Zusammenhangskomponente*. Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten eines Graphen  $G$  wird mit  $c(G)$  bezeichnet.

» 42

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Eulersche Linie I

$G$  sei ein zusammenhängender Graph oder Multigraph. Man nennt einen Kantenzug in  $G$  eine *eulersche Linie*, falls er geschlossen ist und sämtliche Kanten von  $G$  durchläuft.

» 44

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Eulersche Linie II

Für jeden zusammenhängenden Graphen oder Multigraphen  $G$  gilt:  $G$  hat genau dann eine eulersche Linie, wenn der Grad jedes Knotens gerade ist. (notwendig und hinreichend)

&gt;&gt; 45

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Hamiltonkreis II

Hat ein Graph  $G = (V, E)$  einen Hamiltonkreis, so gilt für alle  $A \subseteq V$  stets  $c(G - A) \leq |A|$ . (notwendig)

Gilt  $d(v) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$  für alle  $v \in V$ , so besitzt der Graph  $G = (V, E)$  mit  $|V| = n$  einen Hamiltonkreis. (Satz von Dirac, hinreichend)

Gilt  $d(v) + d(u) \geq n$  für alle nichtadjazenten Knoten  $u, v \in V$ , so besitzt der Graph  $G = (V, E)$  mit  $|V| = n$  einen Hamiltonkreis. (Satz von Ore, hinreichend)

&gt;&gt; 47

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Hamiltonkreis I

$G$  sei ein Graph und  $C$  sei ein Kreis in  $G$ . Man nennt  $C$  einen *Hamiltonschen Kreis* (oder auch *Hamiltonkreis*), wenn  $C$  sämtliche Knoten von  $G$  enthält.

&gt;&gt; 46

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 10

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ . Der ungerichtete Graph  $H$  bestehe aus zwei Zusammenhangskomponenten  $H_1$  und  $H_2$ . Der Teilgraph  $H_1$  sei ein vollständiger Graph mit  $n$  Knoten, der Teilgraph  $H_2$  sei ein Baum mit  $n$  Knoten. Der Graph  $G$  entsteht aus  $H$  dadurch, dass man weitere Kanten wie folgt zu  $H$  hinzufügt: Man verbindet jeden Knoten von  $H_1$  mit jedem Knoten von  $H_2$  durch eine Kante.

- Wie viele Kanten besitzt der Graph  $G$ ?
- Besitzt der Graph  $G$  einen Hamiltonkreis? Gib eine kurze Begründung.
- Begründe, weshalb der Graph  $G$  im Allgemeinen keine eulersche Linie besitzt.

&gt;&gt; 48

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 11

Unter einem *Hyperwürfel*  $Q_n$  versteht man den folgenden Graphen: Knotenmenge von  $Q_n$  ist die Menge aller  $n$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_n)$  mit  $x_i \in \{0, 1\}$  für  $i = 1, \dots, n$ . Zwei Knoten von  $Q_n$  sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sich die entsprechenden  $n$ -Tupel an genau einer Stelle unterscheiden.

Beweise durch vollständige Induktion, dass der Hyperwürfel  $Q_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$  einen Hamiltonkreis besitzt.

&gt;&gt; 49

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 11 – Lösung II

Induktionsannahme:

Für ein fest gewähltes  $n \in \mathbb{N}$  besitzt der Hyperwürfel  $Q_n$  einen Hamiltonkreis.

Induktionsschritt:

Der Hyperwürfel  $Q_{n+1}$  entsteht aus  $Q_n$ , indem man  $Q_n$  verdoppelt (und die Kopie spiegelt), die mit den Knoten assoziierten Tupel um 0 bzw. 1 ergänzt und die entsprechenden Verbindungskanten hinzufügt.

&gt;&gt; 51

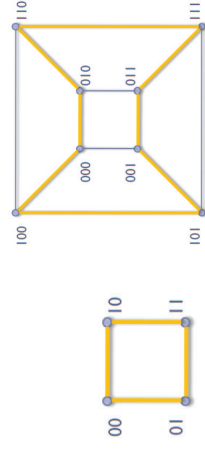
© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 11 – Lösung I

Induktionsanfang:

Die Hyperwürfel  $Q_2$  und  $Q_3$  besitzen Hamiltonkreise.



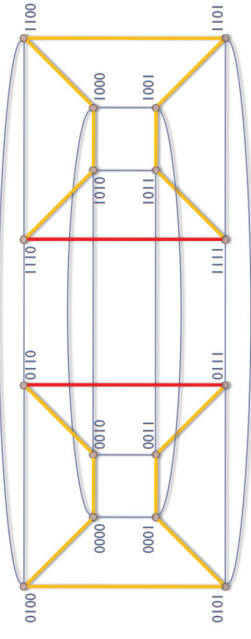
&gt;&gt; 50

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 11 – Lösung III

Demonstration am Beispiel von  $Q_4$ :



Die orangenen (bzw. roten) Kanten sind die Hamiltonkreise der beiden enthaltenen Hyperwürfel  $Q_3$ . Die beiden roten Kanten werden aus den Hamiltonkreisen „entfernt“, die orangenen Kantenzüge werden neu verbunden.

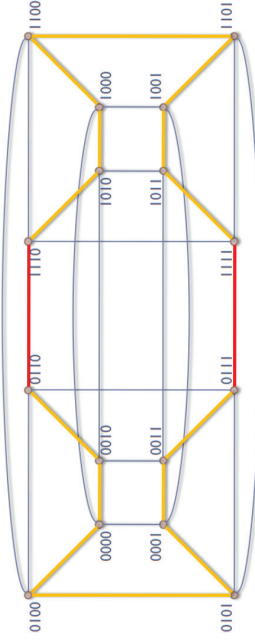
&gt;&gt; 52

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 11 – Lösung IV

Es entsteht der Hamiltonkreis des  $Q_4$ :



Auf analoge Art lässt sich ein Hamiltonkreis für jeden Hyperwürfel  $Q_{n+1}$  aus den (nach der Induktionsannahme existierenden) Hamiltonkreisen der beiden Hyperwürfel  $Q_n$  konstruieren.  $\square$

&gt;&gt; 53

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Isomorphie

Zwei Graphen  $G$  und  $H$  heißen *isomorph* (oder *strukturgleich*), wenn es eine bijektive Abbildung  $\varphi$  gibt, die die Knoten von  $G$  auf die Knoten von  $H$  abbildet, so dass gilt:

$$\forall u, v \in V(G) : \{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E(H).$$

Die Abbildung  $\varphi$  heißt *Isomorphismus*.

&gt;&gt; 55

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 12

Wahr oder falsch? Gib jeweils eine (kurze) Begründung.

- (i) Jeder vollständige Graph besitzt einen Hamiltonkreis.
- (ii) In einem Graphen ist die Summe aller Knotengrade stets gerade.
- (iii) Ein ungerichteter Graph besitzt genau dann eine eulersche Linie, wenn jeder Knoten einen geraden Grad besitzt.
- (iv) Es existiert kein ungerichteter Graph mit  $n$  Knoten und  $n^2$  Kanten.
- (v) Das „Haus des Nikolaus“ besitzt eine eulersche Linie.
- (vi) Es sei  $G = (V, E)$ . Gilt  $c(G - A) < |A|$  für alle Teilmengen  $A \subseteq V$ , so besitzt der Graph  $G$  einen Hamiltonkreis.

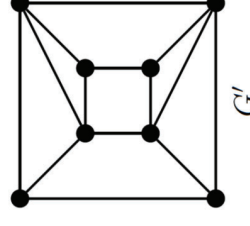
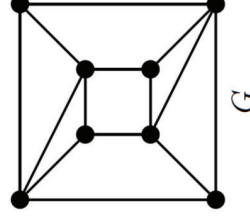
&gt;&gt; 54

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 13

Sind die folgenden beiden Graphen isomorph? Gib eine (kurze) Begründung für deine Antwort!



&gt;&gt; 56

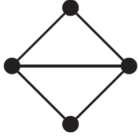
© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 14

$G$  sei ein vollständiger Graph mit genau 8 Knoten.

- Wie viele Kanten hat  $G$ ?
- Wie viele verschiedene Kreise der Länge 3 enthält  $G$ ?
- Wie viele verschiedene Kreise der Länge 4 enthält  $G$ ?
- Wie viele verschiedene Teilgraphen, die isomorph zum abgebildeten Graphen sind, enthält  $G$ ?



&gt;&gt; 57

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Tiefensuche II

- Falls es keinen unmarkierten Knoten  $u \in V$  gibt, so dass  $(a, u) \in E$  gilt, und falls  $a$  nicht die Wurzel von  $B$  ist, so geht man zurück zum Vater  $w$  von  $a$  in  $B$  und setzt  $a := w$ . Diesen Schritt bezeichnet man als den *Rückwärtsschritt* (*back-tracking step*). Nun fährt man mit Schritt (2) fort.
- Falls es keinen unmarkierten Knoten  $u \in V$  gibt, so dass  $(a, u) \in E$  gilt, und falls  $a$  die Wurzel von  $B$  ist, so endet der Algorithmus. Die von  $v$  aus erreichbaren Knoten sind genau die markierten Knoten. Das sind auch genau die Knoten von  $B$ .

&gt;&gt; 59

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Tiefensuche I

- Markiere den Knoten  $v$  und setze  $a := v$ . In diesem Schritt sei  $B$  der Baum, dessen einziger Knoten die Wurzel  $v$  ist.
- Falls es einen unmarkierten Knoten  $u \in V$  gibt, so dass  $(a, u) \in E$  gilt, so wähle ein solches  $u$ , füge  $u$  und die Kante  $(a, u)$  zum Baum  $B$  hinzu, markiere  $u$  und setze  $a := u$ . Diesen Schritt bezeichnet man als den *Vorwärtsschritt* (*advance step*).

&gt;&gt; 58

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Breitensuche I

- Markiere den Knoten  $v$  und setze  $a := v$ . In diesem Schritt sei  $B$  der Baum, dessen einziger Knoten die Wurzel  $v$  ist.
- Falls es einen unmarkierten Knoten  $u \in V$  gibt, so dass  $(a, u) \in E$  gilt, so wähle ein solches  $u$ , füge  $u$  und die Kante  $(a, u)$  zum Baum  $B$  hinzu und markiere  $u$ . Im Unterschied zur Tiefensuche bleibt in diesem Schritt der ursprüngliche Knoten  $a$  der aktuelle Knoten.

&gt;&gt; 60

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Breitensuche II

3. Falls es keinen unmarkierten Knoten  $u \in V$  gibt, so dass  $(a, u) \in E$  gilt, und falls es einen Knoten  $b$  in  $B$  gibt, von dem aus es eine Kante  $(b, u)$  zu einem unmarkierten Knoten  $u$  gibt, so wähle aus allen solchen Knoten  $b$  denjenigen aus, der schon am längsten im Baum  $B$  ist und setze  $a := b$ . Der Knoten  $b$  wird also der neue aktuelle Knoten und der Algorithmus fährt mit Schritt (2) fort.
4. Falls es keine Kante  $(a, u)$  vom aktuellen Knoten zu einem unmarkierten Knoten gibt und auch kein Knoten  $b$  in  $B$  existiert, der zu einem unmarkierten Knoten benachbart ist, so stoppt der Algorithmus.

## Aufgabe 15

Führe für den folgenden Graphen  $G$  eine Breiten- sowie eine Tiefensuche durch. In beiden Fällen soll der Knoten  $a$  als Startknoten gewählt werden. Stelle den jeweils erhaltenen Baum in einer Zeichnung dar. Gibt es mehrere Möglichkeiten, einen Nachbarknoten auszuwählen, so entscheidet die alphabetische Reihenfolge.

