Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Bonusklausur am 17.01.2020 (Teil 1, Lösungen)

8. Januar 2020

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1

(i) Falsch; es gilt beispielsweise $(a, c) \notin R$.

(ii) Falsch; es gilt beispielsweise $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$.

(iii) Falsch; es gilt $(c, c) \notin R$.

(iv) Falsch; es gilt beispielsweise $(a, a) \in R$.

(v) Falsch; es gilt beispielsweise $(b, a), (a, d) \in R$, aber nicht $(b, d) \in R$.

Aufgabe 2

a) $R_a = \Big\{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (1,2),\ (2,3)\Big\}$
   - nicht transitiv, da z.B. $(1,3)$ fehlt

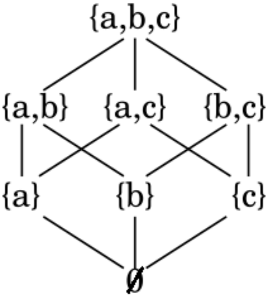
b) $R_b = \Big\{(1,1)\Big\}$
   - triviale Symmetrie, triviale Transitivität, nicht irreflexiv

c) $R_c = \Big\{(1,2),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,2),\ (1,3)\Big\}$
   - nicht symmetrisch, da $(3,1)$ fehlt
   - nicht antisymmetrisch, da z.B. $(2,3)$ und $(3,2)$ enthalten ist.

d) $R_d = \emptyset$

Aufgabe 3

Es ergibt sich das folgende Hasse-Diagramm:



Aufgabe 4

Es seien A und B Mengen mit $|A| = 7$ und $|B| = 9$. Betrachtet werden Abbildungen $A \to B$.

a) Es gibt insgesamt $9^7 = 4.782.969$ Abbildungen.

b) Es gibt insgesamt $9^{\underline{7}} = 181.440$ injektive Abbildungen.

c) Es gibt keine surjektiven Abbildungen, da $|B| > |A|$ gilt.

d) Es gibt keine injektiven Abbildungen mit $f(a_1) = f(a_3)$.

e) Wie in b) existieren 181.440 injektive Abbildungen. $f(a_1) \neq f(a_3)$ ist durch die Injektivität bereits implizit gegeben.

f) Es gibt insgesamt $9^5 \cdot 8^2 = 3.779.136$ derartige Abbildungen.

Aufgabe 5a-c

a) Es gibt insgesamt $\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} = 246.820$ Möglichkeiten, exakt 3 richtige Gewinnzahlen anzukreuzen.

b) Es gibt insgesamt $\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1} + \binom{6}{6} \cdot \binom{43}{0} = 259$ Möglichkeiten, mindestens 5 richtige Gewinnzahlen anzukreuzen.

c) Der gesuchte Koeffizient lautet $\binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84$.

Aufgabe 5d-g

d) Anzahl der möglichen Wörter:

$$\binom{16}{5,1,5,4,1} = \frac{16!}{5! \cdot 1! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 1!} = 60.540.480.$$

e) Es gibt $\binom{n+k-1}{n}$ Möglichkeiten.

f) Zunächst erhält jedes Kind 2 Bonbons. Es verbleiben $n-2k$ Bonbons. Daraus resultiert die folgende Anzahl an Möglichkeiten:

$$\binom{k-1+n-2k}{n-2k} = \binom{n-k-1}{n-2k}.$$

g) Der gesuchte Koeffizient lautet $\binom{13}{2,1,5,5} = \frac{13!}{2! \cdot 1! \cdot 5! \cdot 5!} = 216.216.$

Aufgabe 6

Es sei $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Jedes der n Elemente $a_1, \ldots, a_n$ kann in der Teilmenge enthalten oder nicht in der Teilmenge enthalten sein – für jedes Element existieren also exakt 2 Möglichkeiten. Für n Elemente gibt es dementsprechend 2^n Möglichkeiten, die Elemente der Teilmenge auszuwählen – und somit 2^n verschiedene Teilmengen.

Aufgabe 7 I

<u>(I) Induktionsanfang</u>:

Für $n = 1$ gilt $\sum\limits_{i=0}^{1} \binom{1}{i} = 2$ sowie $2^1 = 2$. ✓

<u>(II) Induktionsschritt</u>:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h. $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} + \binom{n+1}{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} + \binom{n+1}{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0} + \sum_{i=1}^{n} \left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right) + \binom{n+1}{n+1}\end{aligned}$$

Aufgabe 7 II

$$
\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} + 1 \\
&= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} + 1 \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \\
&= 2 \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \\
&= 2 \cdot 2^{n} \\
&= 2^{n+1}
\end{aligned}
$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $\square$

Aufgabe 8

Zunächst wird mit der Siebformel die Anzahl der durch 2, 3 oder 7 teilbaren Elemente zwischen 1 und 42 bestimmt:

$$\left\lfloor \frac{42}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{42}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{42}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{42}{2 \cdot 3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{42}{2 \cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{42}{3 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{42}{2 \cdot 3 \cdot 7} \right\rfloor = 30.$$

Bei den verbleibenden $42 - 30 = 12$ Elementen handelt es sich um die Elemente, die weder durch 2, 3 oder 7 teilbar sind. Diese sind teilerfremd zu 42.

Aufgabe 9

a) Es gibt insgesamt 3^n Möglichkeiten, ein n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ zu erzeugen, wenn $x_i \in \{0, 1, 2\}$ (für $i = 1, \ldots, n$) gelten soll. Folglich besitzt der Graph H_n insgesamt 3^n Knoten.

b) Es gibt $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten, die 2 Stellen auszuwählen, an denen sich zwei verbundene Knoten unterscheiden. Es gibt insgesamt $2^2 = 4$ Tupel, die sich exakt an den beiden ausgewählten Stellen von einem Tupel unterscheiden. Jeder Knoten ist folglich mit $\binom{n}{2} \cdot 4$ anderen Knoten verbunden. Es existieren demnach

$$3^n \cdot \binom{n}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot 3^n \cdot \binom{n}{2}$$

Kanten. Der Faktor $\frac{1}{2}$ ist notwendig, um die Doppelzählung zu kompensieren.

Aufgabe 10

a) H_1 besitzt $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ Kanten. H_2 besitzt $n-1$ Kanten. Für die Verbindung von H_1 und H_2 werden $n \cdot n = n^2$ Kanten benötigt. Als Gesamtanzahl der Kanten von G ergibt sich:

$$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + n - 1 + n^2 = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1.$$

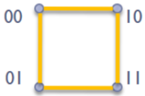
b) Für alle Knoten $v \in G$ gilt $d(v) \geq \frac{n}{2}$. Nach dem Satz von Dirac existiert folglich ein Hamiltonkreis.

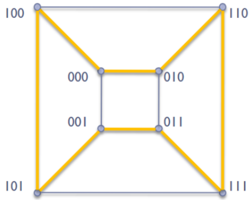
c) Jeder Knoten des Teilgraphen H_1 ist mit $n-1$ Knoten aus H_1 und n Knoten aus H_2 verbunden, hat also den ungeraden Grad $2n-1$. Folglich existiert keine Eulersche Linie.

Aufgabe 11 – Lösung I

Induktionsanfang:

Die Hyperwürfel Q_2 und Q_3 besitzen Hamiltonkreise.





Aufgabe 11 – Lösung II

Induktionsannahme:

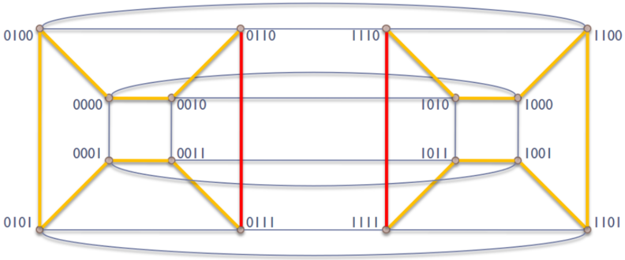
Für ein fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$ besitzt der Hyperwürfel Q_n einen Hamiltonkreis.

Induktionsschritt:

Der Hyperwürfel Q_{n+1} entsteht aus Q_n, indem man Q_n verdoppelt (und die Kopie spiegelt), die mit den Knoten assoziierten Tupel um 0 bzw. 1 ergänzt und die entsprechenden Verbindungskanten hinzufügt.

Aufgabe 11 – Lösung III

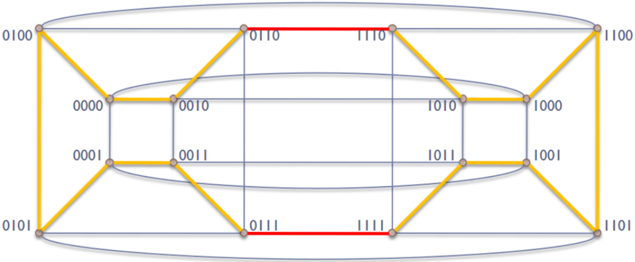
Demonstration am Beispiel von Q_4:



Die orangenen (bzw. roten) Kanten sind die Hamiltonkreise der beiden enthaltenen Hyperwürfel Q_3. Die beiden roten Kanten werden aus den Hamiltonkreisen „entfernt“, die orangenen Kantenzüge werden neu verbunden.

Aufgabe 11 – Lösung IV

Es entsteht der Hamiltonkreis des Q_4:



Auf analoge Art lässt sich ein Hamiltonkreis für jeden Hyperwürfel Q_{n+1} aus den (nach der Induktionsannahme existierenden) Hamiltonkreisen der beiden Hyperwürfel Q_n konstruieren. $\square$

Aufgabe 12

(i) Falsch, die Aussage gilt nur für vollständige Graphen mit mindestens 3 Knoten.

(ii) Wahr. Jede Kante erhöht die Summe der Knotengrade stets um 2.

(iii) Falsch, der Graph muss zusätzlich zusammenhängend sein.

(iv) Wahr, da ein ungerichteter Graph mit n Knoten maximal $\binom{n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ Kanten besitzen kann.

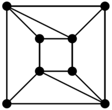
(v) Falsch. Es existieren 2 Knoten mit Grad 3.

(vi) Falsch. In der richtigen Bedingung heißt es $\leq$ statt $<$; außerdem ist diese Bedingung zwar notwendig, aber nicht hinreichend.

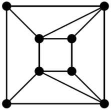
Aufgabe 13

Die beiden Graphen sind nicht isomorph: Dies kann beispielsweise durch eine der folgenden Aussagen begründet werden:

- In G' existieren Knoten mit Grad 4, die mit zwei Knoten von Grad 4 benachbart sind; in G nicht.
- In G' existiert ein Pfad der Länge 4, der nur Knoten von Grad 4 enthält; in G nicht.
- In G' existieren Knoten mit Grad 3, die mit Knoten von Grad 3 benachbart sind; in G nicht.



G



G'

Aufgabe 14

a) G besitzt $\binom{8}{2} = 28$ Kanten.

b) Es gibt $\binom{8}{3}$ Möglichkeiten, 3 Knoten auszuwählen. Aus je 3 Knoten kann exakt 1 Kreis erzeugt werden. G besitzt folglich $\binom{8}{3} = 56$ Kreise der Länge 3.

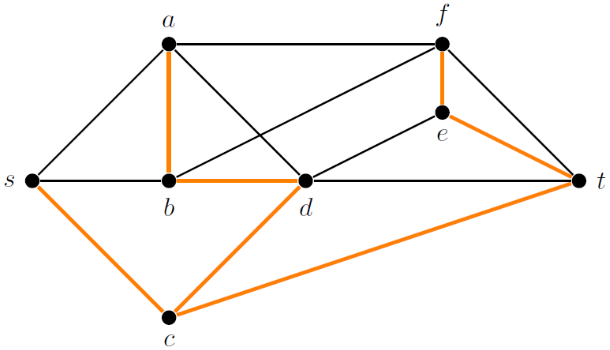
c) Es gibt $\binom{8}{4}$ Möglichkeiten, 4 Knoten auszuwählen. Aus je 4 Knoten können 3 verschiedene Kreise erzeugt werden. G besitzt folglich $\binom{8}{4} \cdot 3 = 210$ Kreise der Länge 4.

d) Für jeden der Kreise aus c) gibt es 2 Möglichkeiten, die Diagonale im Kreis zu wählen. Es gibt also insgesamt $2 \cdot 210 = 420$ Graphen, die isomorph zum angegebenen Graphen sind.

Aufgabe 15 I

Inhalt des Stacks	aktueller Knoten	markierter Knoten
a	a	a
ab	b	b
abd	d	d
$abdc$	c	c
$abdcs$	s	s
$abdc$	c	—
$abdct$	t	t
$abdcte$	e	e
$abdctef$	f	f
$abdcte$	e	—
$abdct$	t	—
$abdc$	c	—
abd	d	—
ab	b	—
a	a	—
—	—	—

Aufgabe 15 II

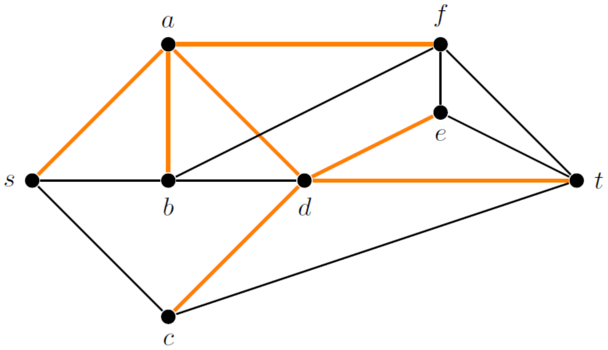


der resultierende Tiefensuchbaum

Aufgabe 15 III

Inhalt der Queue	aktueller Knoten	markierter Knoten
a	a	a
ab	a	b
abd	a	d
$abdf$	a	f
$abdfs$	a	s
$bdfs$	b	—
dfs	d	—
$dfsc$	d	c
$dfsce$	d	e
$dfscet$	d	t
$fscet$	f	—
$scet$	s	—
cet	c	—
et	e	—
t	t	—
—	—	—

Aufgabe 15 IV



der resultierende Breitensuchbaum