

# Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Bonusklausur am 17.01.2020  
(Teil 1, Lösungen)

8. Januar 2020

## Aufgabe 1

- (i) Falsch; es gilt beispielsweise  $(a, c) \notin R$ .
- (ii) Falsch; es gilt beispielsweise  $(a, b) \in R$  und  $(b, a) \in R$ .
- (iii) Falsch; es gilt  $(c, c) \notin R$ .
- (iv) Falsch; es gilt beispielsweise  $(a, a) \in R$ .
- (v) Falsch; es gilt beispielsweise  $(b, a), (a, d) \in R$ , aber nicht  $(b, d) \in R$ .

>> 3

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 2

- a)  $R_a = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 3)\}$ 
  - nicht transitiv, da z.B.  $(1, 3)$  fehlt
- b)  $R_b = \{(1, 1)\}$ 
  - triviale Symmetrie, triviale Transitivität, nicht irreflexiv
- c)  $R_c = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 3)\}$ 
  - nicht symmetrisch, da  $(3, 1)$  fehlt
  - nicht antisymmetrisch, da z.B.  $(2, 3)$  und  $(3, 2)$  enthalten ist.
- d)  $R_d = \emptyset$

>> 4

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

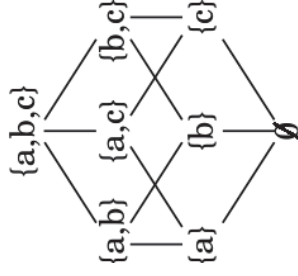
>> 2

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

### Aufgabe 3

Es ergibt sich das folgende Hasse-Diagramm:



>> 5

### Aufgabe 5a-c

- Es gibt insgesamt  $\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} = 246.820$  Möglichkeiten, exakt 3 richtige Gewinnzahlen anzukreuzen.
- Es gibt insgesamt  $\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1} + \binom{6}{6} \cdot \binom{43}{0} = 259$  Möglichkeiten, mindestens 5 richtige Gewinnzahlen anzukreuzen.
- Der gesuchte Koeffizient lautet  $\binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84$ .

>> 7

### Aufgabe 4

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen mit  $|A| = 7$  und  $|B| = 9$ . Betrachtet werden Abbildungen  $A \rightarrow B$ .

- Es gibt insgesamt  $9^7 = 4.782.969$  Abbildungen.
- Es gibt insgesamt  $9^7 = 181.440$  injektive Abbildungen.
- Es gibt keine surjektiven Abbildungen, da  $|B| > |A|$  gilt.
- Es gibt keine injektiven Abbildungen mit  $f(a_1) = f(a_3)$ .
- Wie in b) existieren  $181.440$  injektive Abbildungen.  $f(a_1) \neq f(a_3)$  ist durch die Injektivität bereits implizit gegeben.
- Es gibt insgesamt  $9^5 \cdot 8^2 = 3.779.136$  derartige Abbildungen.

>> 6

### Aufgabe 5d-g

- Anzahl der möglichen Wörter:

$$\binom{16}{5, 1, 5, 4, 1} = \frac{16!}{5! \cdot 1! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 1!} = 60.540.480.$$

- Es gibt  $\binom{n+k-1}{n}$  Möglichkeiten.
- Zunächst erhält jedes Kind 2 Bonbons. Es verbleiben  $n - 2k$  Bonbons. Daraus resultiert die folgende Anzahl an Möglichkeiten:

$$\binom{k-1+n-2k}{n-2k} = \binom{n-k-1}{n-2k}.$$

- Der gesuchte Koeffizient lautet  $\binom{13}{2, 1, 5, 5} = \frac{13!}{2! \cdot 1! \cdot 5! \cdot 5!} = 216.216$ .

>> 8

## Aufgabe 6

Es sei  $M = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Jedes der  $n$  Elemente  $a_1, \dots, a_n$  kann in der Teilmenge enthalten oder nicht in der Teilmenge enthalten sein – für jedes Element existieren also exakt 2 Möglichkeiten. Für  $n$  Elemente gibt es dementsprechend  $2^n$  Möglichkeiten, die Elemente der Teilmenge auszuwählen – und somit  $2^n$  verschiedene Teilmengen.

» 9

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 7 II

$$\begin{aligned} &= 1 + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i-1} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} + 1 \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} + 1 \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \\ &= 2 \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \\ &= 2 \cdot 2^n \\ &= 2^{n+1} \end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.  $\square$

» 11

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 7 I

(I) Induktionsanfang:

Für  $n = 1$  gilt  $\sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} = 2$  sowie  $2^1 = 2$ .  $\checkmark$

(II) Induktionsschritt:

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h.  $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} &= \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} + \binom{n+1}{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0} + \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} + \binom{n+1}{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0} + \sum_{i=1}^n \left( \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right) + \binom{n+1}{n+1} \end{aligned}$$

» 10

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 8

Zunächst wird mit der Siebformel die Anzahl der durch 2, 3 oder 7 teilbaren Elemente zwischen 1 und 42 bestimmt:

$$\left\lfloor \frac{42}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{42}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{42}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{42}{2 \cdot 3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{42}{2 \cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{42}{3 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{42}{2 \cdot 3 \cdot 7} \right\rfloor = 30.$$

Bei den verbleibenden  $42 - 30 = 12$  Elementen handelt es sich um die Elemente, die weder durch 2, 3 oder 7 teilbar sind. Diese sind teilerfremd zu 42.

» 12

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 9

- a) Es gibt insgesamt  $3^n$  Möglichkeiten, ein  $n$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_n)$  zu erzeugen, wenn  $x_i \in \{0, 1, 2\}$  (für  $i = 1, \dots, n$ ) gelten soll. Folglich besitzt der Graph  $H_n$  insgesamt  $3^n$  Knoten.
- b) Es gibt  $\binom{n}{2}$  Möglichkeiten, die 2 Stellen auszuwählen, an denen sich zwei verbundene Knoten unterscheiden. Es gibt insgesamt  $2^2 = 4$  Tupel, die sich exakt an den beiden ausgewählten Stellen von einem Tupel unterscheiden. Jeder Knoten ist folglich mit  $\binom{n}{2} \cdot 4$  anderen Knoten verbunden. Es existieren demnach

$$3^n \cdot \binom{n}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot 3^n \cdot \binom{n}{2}$$

Kanten. Der Faktor  $\frac{1}{2}$  ist notwendig, um die Doppelzählung zu kompensieren.

» 13

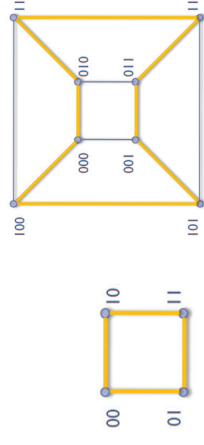
© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 11 – Lösung I

Induktionsanfang:

Die Hyperwürfel  $Q_2$  und  $Q_3$  besitzen Hamiltonkreise.



» 15

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 10

- a)  $H_1$  besitzt  $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$  Kanten.  $H_2$  besitzt  $n - 1$  Kanten. Für die Verbindung von  $H_1$  und  $H_2$  werden  $n \cdot n = n^2$  Kanten benötigt. Als Gesamtanzahl der Kanten von  $G$  ergibt sich:
- $$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + n - 1 + n^2 = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1.$$
- b) Für alle Knoten  $v \in G$  gilt  $d(v) \geq \frac{n}{2}$ . Nach dem Satz von Dirac existiert folglich ein Hamiltonkreis.
- c) Jeder Knoten des Teilgraphen  $H_1$  ist mit  $n - 1$  Knoten aus  $H_1$  und  $n$  Knoten aus  $H_2$  verbunden, hat also den ungeraden Grad  $2n - 1$ . Folglich existiert keine Eulersche Linie.

» 14

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 11 – Lösung II

Induktionsannahme:

Für ein fest gewähltes  $n \in \mathbb{N}$  besitzt der Hyperwürfel  $Q_n$  einen Hamiltonkreis.

Induktionsschritt:

Der Hyperwürfel  $Q_{n+1}$  entsteht aus  $Q_n$ , indem man  $Q_n$  verdoppelt (und die Kopie spiegelt), die mit den Knoten assoziierten Tupel um 0 bzw. 1 ergänzt und die entsprechenden Verbindungskanten hinzufügt.

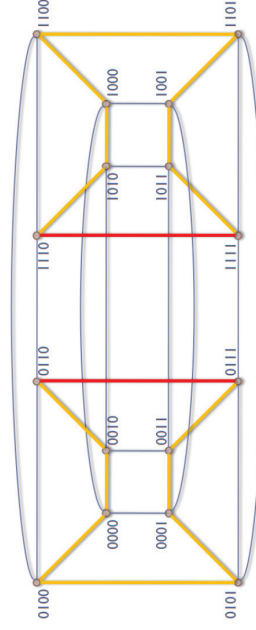
» 16

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 11 – Lösung III

Demonstration am Beispiel von  $Q_4$ :



Die orangenen (bzw. roten) Kanten sind die Hamiltonkreise der beiden enthaltenen Hyperwürfel  $Q_3$ . Die beiden roten Kanten werden aus den Hamiltonkreisen „entfernt“, die orangenen Kantenzüge werden neu verbunden.

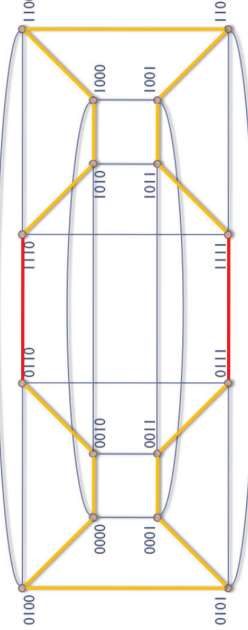
>> 17

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 11 – Lösung IV

Es entsteht der Hamiltonkreis des  $Q_4$ :



Auf analoge Art lässt sich ein Hamiltonkreis für jeden Hyperwürfel  $Q_{n+1}$  aus den (nach der Induktionsannahme existierenden) Hamiltonkreisen der beiden Hyperwürfel  $Q_n$  konstruieren.  $\square$

>> 18

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 12

- (i) Falsch, die Aussage gilt nur für vollständige Graphen mit mindestens 3 Knoten.
- (ii) Wahr. Jede Kante erhöht die Summe der Knotengrade stets um 2.
- (iii) Falsch, der Graph muss zusätzlich zusammenhängend sein.
- (iv) Wahr, da ein ungerichteter Graph mit  $n$  Knoten maximal  $\binom{n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$  Kanten besitzen kann.
- (v) Falsch. Es existieren 2 Knoten mit Grad 3.
- (vi) Falsch. In der richtigen Bedingung heißt es  $\leq$  statt  $<$ ; außerdem ist diese Bedingung zwar notwendig, aber nicht hinreichend.

>> 19

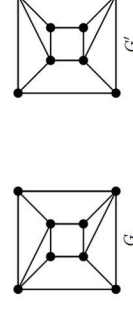
© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 13

Die beiden Graphen sind nicht isomorph: Dies kann beispielsweise durch eine der folgenden Aussagen begründet werden:

- ▶ In  $G'$  existieren Knoten mit Grad 4, die mit zwei Knoten von Grad 4 benachbart sind; in  $G$  nicht.
- ▶ In  $G'$  existiert ein Pfad der Länge 4, der nur Knoten von Grad 4 enthält; in  $G$  nicht.
- ▶ In  $G'$  existieren Knoten mit Grad 3, die mit Knoten von Grad 3 benachbart sind; in  $G$  nicht.



>> 20

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 14

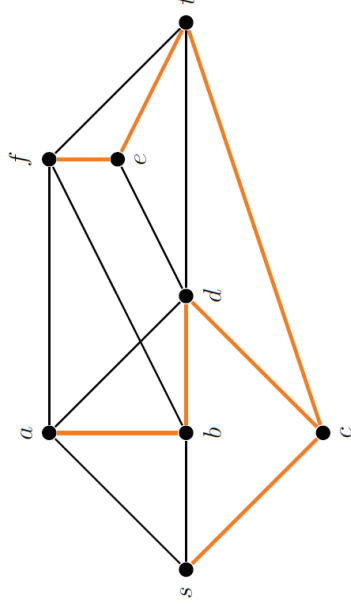
- $G$  besitzt  $\binom{8}{2} = 28$  Kanten.
- Es gibt  $\binom{8}{3}$  Möglichkeiten, 3 Knoten auszuwählen. Aus je 3 Knoten kann exakt 1 Kreis erzeugt werden.  $G$  besitzt folglich  $\binom{8}{3} = 56$  Kreise der Länge 3.
- Es gibt  $\binom{8}{4}$  Möglichkeiten, 4 Knoten auszuwählen. Aus je 4 Knoten können 3 verschiedene Kreise erzeugt werden.  $G$  besitzt folglich  $\binom{8}{4} \cdot 3 = 210$  Kreise der Länge 4.
- Für jeden der Kreise aus c) gibt es 2 Möglichkeiten, die Diagonale im Kreis zu wählen. Es gibt also insgesamt  $2 \cdot 210 = 420$  Graphen, die isomorph zum angegebenen Graphen sind.

>> 21

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 15 II



der resultierende Tiefensuchbaum

>> 23

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 15 I

Inhalt des Stacks	aktueller Knoten	markierter Knoten
a	a	a
ab	b	b
abd	d	d
abdc	c	c
abdcs	s	s
abdc	c	—
abdct	t	t
abdcte	e	e
abdctef	f	f
abdcte	e	—
abdct	t	—
abdct	c	—
abdct	d	—
abd	b	—
ab	a	—
—	—	—

>> 22

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 15 III

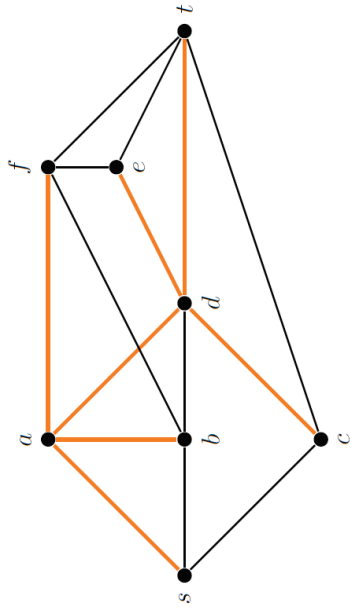
Inhalt der Queue	aktueller Knoten	markierter Knoten
a	a	a
ab	a	b
abd	a	d
abdf	a	f
abdfs	a	s
bdfs	b	—
dfs	d	—
dfsc	d	c
dfsce	d	e
dfscet	d	t
fscet	f	—
scet	s	—
cet	c	—
et	e	—
t	t	—
—	—	—

>> 24

© 2020 Steven Köhler

8. Januar 2020

## Aufgabe 15 IV



der resultierende Breitensuchbaum