Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Klausur am 17.02.2020
(Teil 2)

13. Februar 2020

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1

Es sei $L = \{1, 2, 3\}$, $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und $N = \{1, 2, \ldots, 15\}$. Mit $\mathcal{P}(L)$, $\mathcal{P}(M)$ und $\mathcal{P}(N)$ seien die Potenzmengen von L, M und N bezeichnet.

a) Wie viele Elemente besitzen $\mathcal{P}(M)$ und $\mathcal{P}(N)$?

b) Gib alle Elemente von $\mathcal{P}(L)$ an.

c) Wie viele 5-elementige Teilmengen besitzt N?

d) Wie viele Abbildungen $f : L \to M$ gibt es und wie viele davon sind injektiv?

e) Eine Zeile im Pascalschen Dreieck ist:

$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$$

Berechne die nächste Zeile!

f) Es sei $n = 10.000$. Berechne $\binom{n}{2} + \binom{n}{9.998}$.

Aufgabe 2

a) Wie viele sinnvolle oder sinnlose Wörter lassen sich aus den Buchstaben des Worts MASSACHUSETTS bilden?

b) Wie lautet der Koeffizient von x^7y^5 in $(x + y)^{12}$?

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, im Lotto exakt 4 richtige Gewinnzahlen anzukreuzen?

d) Gegeben seien zwei Mengen A und B mit $|A| = 11$ und $|B| = 3$. Wie viele Abbildungen $f : A \to B$ gibt es, für die paarweise verschiedene Elemente $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ mit $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = f(a_4)$ existieren?

e) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 10 nicht unterscheidbare Bonbons auf 4 Kinder zu verteilen?

Aufgabe 3

Zeige mit vollständiger Induktion, dass für die Fibonacci-Zahlen der folgende Zusammenhang gilt:

$$f_0^2 + f_1^2 + \ldots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1} .$$

Aufgabe 4

Zeige mit vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$4 \mid (5^n + 7) .$$

Aufgabe 5

Zeige durch vollständige Induktion, dass für alle $r \geq 5$ gilt:

$$\sum_{j=5}^{r} \binom{j}{5} = \binom{r+1}{r-5}.$$

Aufgabe 6

Zeige, dass bis auf Isomorphie nur eine einzige Gruppe der Ordnung 5 existiert.

Aufgabe 7

Es sei $\mathcal{G}$ die symmetrische Gruppe S_3 und $\mathcal{H}$ die durch das Element (12) erzeugte Untergruppe von $\mathcal{G}$. Bestimme die Links- und die Rechtsnebenklassen von $\mathcal{H}$.

Aufgabe 8

Es seien a, b, c, d Elemente einer Gruppe $\mathcal{G}$.

a) Vereinfache den folgenden Ausdruck:

$$a\left(bdc^{-1}\right)^{-1}bd^{-1}a\left(b^{-1}d^{-1}a\right)^{-1}a^{-1}b^{-1}$$

b) Können weitere Vereinfachungen vorgenommen werden, wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass $\mathcal{G}$ kommutativ ist?

Aufgabe 9

Entscheide, ob die folgenden Abbildungen injektiv und/oder surjektiv sind. Gib jeweils eine (kurze) Begründung.

a) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}: \quad f(n) = 2n + 3$

b) $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}: \quad u(a, b) = \Big(ba,\ 7a + 1\Big)$

c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}: \quad f(x, y) = \Big(1 + x,\ x + y\Big)$

d) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}: \quad g(a, b) = \Big(ab,\ (a+1)b,\ a(b^2 - 2)\Big)$

Aufgabe 10

Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ sei gegeben durch

$$f(n) = \binom{n+5}{5} + \binom{n+5}{6} - \binom{n+6}{n}.$$

Begründe (kurz), wieso f nicht injektiv ist.

Aufgabe 11

Falls vorhanden, bestimme man das multiplikative Inverse von

a) 3 in $\mathbb{Z}_{50}$

b) 30 in $\mathbb{Z}_{51}$

c) 300 in $\mathbb{Z}_{301}$

d) 486 in $\mathbb{Z}_{967}$, wobei das Ergebnis durch ein $s \in \{1, 2, \ldots, 966\}$ ausgedrückt werden soll

Gib jeweils eine kurze Begründung für die Antworten!

Aufgabe 12

a) Der Graph G habe 20 Knoten. Es gelte: 6 Knoten von G haben den Grad 2, 4 Knoten haben den Grad 3, 8 Knoten haben den Grad 4 und die restlichen 2 Knoten haben den Grad 8. Wie viele Kanten hat G?

b) Der Graph G sei wie in a). Hat G eine Eulersche Linie? (Kurze Begründung!)

c) H sei ein Graph mit 300 Knoten und bestehe aus vier Zusammenhangskomponenten $H_1, \ldots, H_4$. H_1 sei ein Kreis und die übrigen Zusammenhangskomponenten seien Bäume. Wie viele Kanten hat H?

Aufgabe 13

Gegeben sei eine Menge X von 18 paarweise nicht isomorphen Graphen mit höchstens 4 Ecken. Unter den Graphen in X sind 10 zusammenhängend, 4 haben genau 3 Kanten und 11 haben genau 4 Ecken. 3 der Graphen in X sind zusammenhängend mit genau 3 Kanten. 6 der Graphen in X sind zusammenhängend mit genau 4 Ecken. 3 der Graphen in X haben genau 3 Kanten und 4 Ecken. Schließlich sind zwei der Graphen mit genau 3 Kanten und 4 Knoten auch zusammenhängend.

Wie viele Graphen in X haben gleichzeitig folgende 3 Eigenschaften: Sie haben weniger als 4 Ecken, weniger als 3 Kanten und sind nicht zusammenhängend?

Aufgabe 14

a) Gibt es mehr als 300 binäre Relationen auf $B = \{a, b, c\}$?

b) Sei $C = \{5, 7, 15, 70, 105\}$ und sei $\leq$ die Teilbarkeitsrelation auf C. Gib das Hasse-Diagramm von $(C, \leq)$ an.

c) Gegeben sei die Menge $A = \{a, b, c, d\}$. Gib eine Relation R an, die symmetrisch, nicht reflexiv und transitiv ist, für die außerdem $|R| > 9$ gilt. Falls eine solche Relation nicht existiert, ist eine kurze Begründung zu geben.

d) Gegeben sei eine Menge $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ sowie eine auf dieser Menge definierte Relation

$$R = \Big\{(a, a), (a, c), (e, c), (b, d), (d, b), (f, a), (d, f)\Big\}.$$

Bestimme die kleinstmögliche Relation S, die eine Äquivalenzrelation ist und die R vollständig enthält.

Aufgabe 15

π sei folgende Permutation der Menge $\{1, 2, \ldots, 10\}$:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 3 & 2 & 10 & 7 & 1 & 9 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Gib π in Zyklenschreibweise an! Stelle π als Produkt von Transpositionen dar und entscheide, ob π gerade oder ungerade ist.

Aufgabe 16a-e

Wahr oder falsch?

a) Es existieren bijektive Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b) Es existiert keine injektive Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$.

c) Es existiert eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

d) Jeder Graph, der nur Knoten geraden Grades besitzt, hat einen Hamiltonkreis.

e) Es existiert ein Graph mit 5 Knoten, in dem keine zwei Knoten denselben Grad besitzen.

Aufgabe 16f-i

Wahr oder falsch?

f) Jede symmetrische Relation R besitzt eine gerade Anzahl an Elementen, d.h. $|R| = 2n$ für $n \in \mathbb{N}$.

g) Das Inverse von 2703 in $\mathbb{Z}_{3012}$ ist 147.

h) Es gibt symmetrische Ordnungsrelationen.

i) Es gilt $123 \equiv 321 \pmod{11}$.

Viel Erfolg bei der Klausur :)