

# Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Klausur am 17.02.2020  
(Teil 2)

13. Februar 2020

## Aufgabe 1

Es sei  $L = \{1, 2, 3\}$ ,  $M = \{1, 2, 3, 4\}$  und  $N = \{1, 2, \dots, 15\}$ . Mit  $\mathcal{P}(L)$ ,  $\mathcal{P}(M)$  und  $\mathcal{P}(N)$  seien die Potenzmengen von  $L$ ,  $M$  und  $N$  bezeichnet.

- Wie viele Elemente besitzen  $\mathcal{P}(M)$  und  $\mathcal{P}(N)$ ?
- Gib alle Elemente von  $\mathcal{P}(L)$  an.
- Wie viele 5-elementige Teilmengen besitzt  $N$ ?
- Wie viele Abbildungen  $f : L \rightarrow M$  gibt es und wie viele davon sind injektiv?
- Eine Zeile im Pascalschen Dreieck ist:

1	7	21	35	35	21	7	1
---	---	----	----	----	----	---	---

Berechne die nächste Zeile!

- Es sei  $n = 10.000$ . Berechne  $\binom{n}{2} + \binom{n}{9.998}$ .

>> 3

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

## Aufgabe 2

- Wie viele sinnvolle oder sinnlose Wörter lassen sich aus den Buchstaben des Worts MASSACHUSETTS bilden?
- Wie lautet der Koeffizient von  $x^7y^5$  in  $(x+y)^{12}$ ?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, im Lotto exakt 4 richtige Gewinnzahlen anzukreuzen?
- Gegeben seien zwei Mengen  $A$  und  $B$  mit  $|A| = 11$  und  $|B| = 3$ . Wie viele Abbildungen  $f : A \rightarrow B$  gibt es, für die paarweise verschiedene Elemente  $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$  mit  $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = f(a_4)$  existieren?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, 10 nicht unterscheidbare Bonbons auf 4 Kinder zu verteilen?

>> 2

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

### Aufgabe 3

Zeige mit vollständiger Induktion, dass für die Fibonacci-Zahlen der folgende Zusammenhang gilt:

$$f_0^2 + f_1^2 + \dots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}.$$

>> 5

### Aufgabe 5

Zeige durch vollständige Induktion, dass für alle  $r \geq 5$  gilt:

$$\sum_{j=5}^r \binom{j}{5} = \binom{r+1}{r-5}.$$

>> 7

### Aufgabe 4

Zeige mit vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt:

$$4 \mid (5^n + 7).$$

>> 6

### Aufgabe 6

Zeige, dass bis auf Isomorphie nur eine einzige Gruppe der Ordnung 5 existiert.

>> 8

## Aufgabe 7

Es sei  $\mathcal{G}$  die symmetrische Gruppe  $S_3$  und  $\mathcal{H}$  die durch das Element (12) erzeugte Untergruppe von  $\mathcal{G}$ . Bestimme die Links- und die Rechtsnebenklassen von  $\mathcal{H}$ .

>> 9

## Aufgabe 9

Entscheide, ob die folgenden Abbildungen injektiv und/oder surjektiv sind. Gib jeweils eine (kurze) Begründung.

- $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}: f(n) = 2n + 3$
- $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}: u(a, b) = (ba, 7a + 1)$
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}: f(x, y) = (1 + x, x + y)$
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}: g(a, b) = (ab, (a + 1)b, a(b^2 - 2))$

>> 11

## Aufgabe 8

Es seien  $a, b, c, d$  Elemente einer Gruppe  $\mathcal{G}$ .

- Vereinfache den folgenden Ausdruck:  
$$a(bdc^{-1})^{-1}bd^{-1}a(b^{-1}d^{-1}a)^{-1}a^{-1}b^{-1}$$
- Können weitere Vereinfachungen vorgenommen werden, wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass  $\mathcal{G}$  kommutativ ist?

>> 10

## Aufgabe 10

Die Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  sei gegeben durch

$$f(n) = \binom{n+5}{5} + \binom{n+5}{6} - \binom{n+6}{n}.$$

Begründe (kurz), wieso  $f$  nicht injektiv ist.

>> 12

## Aufgabe 11

Falls vorhanden, bestimme man das multiplikative Inverse von

- 3 in  $\mathbb{Z}_{50}$
- 30 in  $\mathbb{Z}_{51}$
- 300 in  $\mathbb{Z}_{301}$
- 486 in  $\mathbb{Z}_{967}$ , wobei das Ergebnis durch ein  $s \in \{1, 2, \dots, 966\}$  ausgedrückt werden soll

Gib jeweils eine kurze Begründung für die Antworten!

» 13

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

## Aufgabe 13

Gegeben sei eine Menge  $X$  von 18 paarweise nicht isomorphen Graphen mit höchstens 4 Ecken. Unter den Graphen in  $X$  sind 10 zusammenhängend, 4 haben genau 3 Kanten und 11 haben genau 4 Ecken. 3 der Graphen in  $X$  sind zusammenhängend mit genau 3 Kanten. 6 der Graphen in  $X$  sind zusammenhängend mit genau 4 Ecken. 3 der Graphen in  $X$  haben genau 3 Kanten und 4 Ecken. Schließlich sind zwei der Graphen mit genau 3 Kanten und 4 Knoten auch zusammenhängend.

Wie viele Graphen in  $X$  haben gleichzeitig folgende 3 Eigenschaften: Sie haben weniger als 4 Ecken, weniger als 3 Kanten und sind nicht zusammenhängend?

» 15

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

## Aufgabe 12

- Der Graph  $G$  habe 20 Knoten. Es gelte: 6 Knoten von  $G$  haben den Grad 2, 4 Knoten haben den Grad 3, 8 Knoten haben den Grad 4 und die restlichen 2 Knoten haben den Grad 8. Wie viele Kanten hat  $G$ ?
- Der Graph  $G$  sei wie in a). Hat  $G$  eine Eulersche Linie? (Kurze Begründung!)
- $H$  sei ein Graph mit 300 Knoten und bestehe aus vier Zusammenhangskomponenten  $H_1, \dots, H_4$ .  $H_1$  sei ein Kreis und die übrigen Zusammenhangskomponenten seien Bäume. Wie viele Kanten hat  $H$ ?

» 14

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

## Aufgabe 14

- Gibt es mehr als 300 binäre Relationen auf  $B = \{a, b, c\}$ ?
- Sei  $C = \{5, 7, 15, 70, 105\}$  und sei  $\leq$  die Teilbarkeitsrelation auf  $C$ . Gib das Hasse-Diagramm von  $(C, \leq)$  an.
- Gegeben sei die Menge  $A = \{a, b, c, d\}$ . Gib eine Relation  $R$  an, die symmetrisch, nicht reflexiv und transitiv ist, für die außerdem  $|R| > 9$  gilt. Falls eine solche Relation nicht existiert, ist eine kurze Begründung zu geben.
- Gegeben sei eine Menge  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  sowie eine auf dieser Menge definierte Relation

$$R = \{(a, a), (a, c), (e, c), (b, d), (d, b), (f, a), (d, f)\}.$$

Bestimme die kleinstmögliche Relation  $S$ , die eine Äquivalenzrelation ist und die  $R$  vollständig enthält.

» 16

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

## Aufgabe 15

$\pi$  sei folgende Permutation der Menge  $\{1, 2, \dots, 10\}$ :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 3 & 2 & 10 & 7 & 1 & 9 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Gib  $\pi$  in Zykelschreibweise an! Stelle  $\pi$  als Produkt von Transpositionen dar und entscheide, ob  $\pi$  gerade oder ungerade ist.

» 17

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

## Aufgabe 16f-i

Wahr oder falsch?

- f) Jede symmetrische Relation  $R$  besitzt eine gerade Anzahl an Elementen, d.h.  $|R| = 2n$  für  $n \in \mathbb{N}$ .
- g) Das Inverse von 2703 in  $\mathbb{Z}_{3012}$  ist 147.
- h) Es gibt symmetrische Ordnungsrelationen.
- i) Es gilt  $123 \equiv 321 \pmod{11}$ .

» 19

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

## Aufgabe 16a-e

Wahr oder falsch?

- a) Es existieren bijektive Abbildungen  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .
- b) Es existiert keine injektive Abbildung  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ .
- c) Es existiert eine surjektive Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- d) Jeder Graph, der nur Knoten geraden Grades besitzt, hat einen Hamiltonkreis.
- e) Es existiert ein Graph mit 5 Knoten, in dem keine zwei Knoten denselben Grad besitzen.

» 18

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

Viel Erfolg bei der Klausur :)

» 20

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020