Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Klausur am 17.02.2020
(Teil 2, Lösungen)

13. Februar 2020

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1a-c

a)

$$|M| = 4 \Rightarrow |\mathcal{P}(M)| = 2^4 = 16$$

$$|N| = 15 \Rightarrow |\mathcal{P}(N)| = 2^{15} = 32.768$$

b)

$$\mathcal{P}(L) = \left\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\right\}$$

c)

$$\binom{15}{5} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 7 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 11 = 3.003$$

Aufgabe 1d-f

d) Abbildungen insgesamt: $4^3 = 64$
   injektive Abbildungen: $4^{\underline{3}} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

e) Die nächste Zeile im Pascalschen Dreieck lautet:

$$1 \qquad 8 \qquad 28 \qquad 56 \qquad 70 \qquad 56 \qquad 28 \qquad 8 \qquad 1$$

f) Das Ergebnis für $n = 10.000$: 99.990.000.

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{9.998} = 2 \cdot \binom{n}{2} = n(n-1)$$

Aufgabe 2

a) Es lassen sich $\binom{13}{1,2,4,1,1,1,1,2} = \frac{13!}{1!\cdot 2!\cdot 4!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!}$ mögliche Wörter aus MASSACHUSETTS bilden.

b) Der Koeffizient lautet $\binom{12}{7} = \binom{12}{5}$.

c) Es gibt exakt $\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}$ Möglichkeiten, genau 4 Richtige anzukreuzen.

d) Nach dem Schubfachprinzip besitzt jede Abbildung $A \to B$ die genannte Eigenschaft. Es gibt also insgesamt 3^{11} derartige Abbildungen.

e) Es gibt $\binom{13}{10} = \binom{13}{3}$ Möglichkeiten.

Aufgabe 3

(I) Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt $f_0^2 + f_1^2 = 0^2 + 1^2 = 1 \cdot 1 = f_1 \cdot f_2$. ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h. $\sum_{i=0}^{n} f_i^2 = f_0^2 + \ldots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} f_i^2 &= \sum_{i=0}^{n} f_i^2 + f_{n+1}^2 \\
&= f_n \cdot f_{n+1} + f_{n+1}^2 \\
&= f_{n+1} \cdot \left(f_n + f_{n+1}\right) \\
&= f_{n+1} \cdot f_{n+2}
\end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt die Behauptung. □

Aufgabe 4

(I) Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt $4 \mid \underbrace{5^1 + 7}_{=12}$. ✓

(II) Induktionsschritt:

Induktionsannahme: Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt.

$$\begin{aligned} 5^{n+1} + 7 &= 5 \cdot 5^n + 7 \\ &= \underbrace{\underbrace{4 \cdot 5^n}_{4|\ldots} + \underbrace{5^n + 7}_{4|\ldots}}_{4|\ldots} \end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt die Behauptung. $\square$

Aufgabe 5

(I) Induktionsanfang:

Für $r = 5$ gilt: $\sum_{j=5}^{5} \binom{j}{5} = \binom{5}{5} = 1$ und $\binom{5+1}{5-5} = \binom{6}{0} = 1$. ✓

(II) Induktionsschritt:

Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für ein $r \geq 5$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=\mathbf{5}}^{r+\mathbf{1}} \binom{j}{5} &= \sum_{j=\mathbf{5}}^{n} \binom{j}{5} + \binom{r+1}{5} \text{ (nach Induktionsannahme)}\\
&= \binom{r+1}{r-5} + \binom{r+1}{5} \text{ (Symmetrie der Binomialkoeffizienten)}\\
&= \binom{r+1}{r-5} + \binom{r+1}{r-4} \text{ (Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten)}\\
&= \binom{r+2}{r-4}
\end{aligned}$$

Somit ist bewiesen, dass die Behauptung für alle $r \geq 5$ gilt.

Aufgabe 6

Nach dem Satz von Lagrange können die Elemente nur Ordnung 1 oder Ordnung 5 haben. Ordnung 1 besitzt nur das neutrale Element. Die restlichen 4 Elemente haben Ordnung 5. Die Gruppe ist also zyklisch. Zyklische Gruppen derselben Ordnung sind immer isomorph.

Aufgabe 7

S_3 und die durch (12) erzeugte Untergruppe $\mathcal{H}$ von S_3 lauten:

$$S_3 = \Big\{ id,\ (12),\ (13),\ (23),\ (123),\ (132) \Big\}$$
$$\mathcal{H} = \Big\{ id,\ (12) \Big\}.$$

Es ergeben sich die folgenden Linksnebenklassen:

$$\begin{aligned} id\mathcal{H} &= \Big\{ id \circ id,\ id \circ (12) \Big\} \ = \ \Big\{ id,\ (12) \Big\} \\ (13)\mathcal{H} &= \Big\{ (13) \circ id,\ (13) \circ (12) \Big\} \ = \ \Big\{ (13),\ (123) \Big\} \\ (23)\mathcal{H} &= \Big\{ (23) \circ id,\ (23) \circ (12) \Big\} \ = \ \Big\{ (23),\ (132) \Big\}. \end{aligned}$$

Die „restlichen“ Nebenklassen sind mit den bereits genannten identisch.

Aufgabe 8

a) Es gilt:

$$
\begin{aligned}
a\left(bdc^{-1}\right)^{-1}bd^{-1}a\left(b^{-1}d^{-1}a\right)^{-1}a^{-1}b^{-1} &= acd^{-1}b^{-1}bd^{-1}aa^{-1}dba^{-1}b^{-1} \\
&= acd^{-1}d^{-1}dba^{-1}b^{-1} \\
&= acd^{-1}ba^{-1}b^{-1}
\end{aligned}
$$

b) Gilt zusätzlich das Kommutativgesetz, kann der Ausdruck weiter vereinfacht werden zu:

$$cd^{-1}$$

Aufgabe 9a

Nachweis der Injektivität

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ 2x + 3 &= 2y + 3 \\ x &= y \end{aligned}$$

Da aus $f(x) = f(y)$ immer $x = y$ folgt, ist die Abbildung injektiv.

Nachweis der Surjektivität
Die Abbildung ist nicht surjektiv, da z.B. kein $n \in \mathbb{Z}$ existiert mit $f(n) = 2$.

Aufgabe 9b

- $u(a, b)$ ist injektiv, denn:

$$u(a, b) = u(x, y)$$
$$\big(ba, 7a + 1\big) = \big(yx, 7x + 1\big)$$

Es folgt

$$ba = yx \tag{1}$$
$$7a + 1 = 7x + 1 \tag{2}$$

Aus (2) folgt direkt $a = x$. Einsetzen in (1) und Division durch a ($a \neq 0$ wegen $a \in \mathbb{N}$) ergibt $b = y$;

- $u(a, b)$ ist nicht surjektiv, da beispielsweise $u(a, b) = (\star, 2)$ kein Urbild besitzt.

Aufgabe 9c I

Nachweis der Injektivität

$$f(x,y) = f(w,z)$$
$$(1+x, x+y) = (1+w, w+z)$$

Daraus folgt folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} (I) & 1+x & = & 1+w \\ (II) & x+y & = & w+z \end{array}$$

Aus (I) folgt direkt $x = w$.
Setzt man dies nun in (II) ein, erhält man:

$$x+y = x+z$$
$$y = z$$

Aufgabe 9c II

Nachweis der Surjektivität

Sei $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(a-1, 1-a+b) &= (a-1+1, a-1+1-a+b) \\ &= (a, b) \end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, dass f surjektiv ist, da zu jedem $(a, b) \in \mathbb{Z}$ ein Urbild existiert.

Aufgabe 9d I

Nachweis der Injektivität

$$g(a,b) = g(c,d)$$
$$(ab, (a+1)b, a(b^2+1)) = (cd, (c+1)d, c(d^2+1))$$

Daraus folgt folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{crcl} (I) & ab & = & cd \\ (II) & (a+1)b & = & (c+1)d \\ & ab+b & = & cd+d \\ (III) & a(b^2+1) & = & c(d^2+1) \end{array}$$

Aus (I) und (II) folgt direkt $b = d$. Setzt man dies nun in (III) ein, erhält man:

$$a(b^2+1) = c(b^2+1) \text{ (Wegen } b^2+1 \neq 0)$$
$$a = c$$

Es gilt also $a = c$ und $b = d$. Damit ist bewiesen, dass g injektiv ist, da keine 2 verschiedenen Elemente dasselbe Bild haben.

Aufgabe 9d II

Nachweis der Surjektivität

Behauptung: $(1, 0, 0)$ hat kein Urbild.

Angenommen, es sei $g(a, b) = (1, 0, 0)$ für $a, b \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} ab &= 1 \\ a(b^2 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Aus $a(b^2+1) = 0$ folgt (wegen $b^2+1 \neq 0$) $a = 0$, im Widerspruch zu $ab = 1$.

Damit ist bewiesen, dass g nicht surjektiv ist, da mindestens ein Element kein Urbild hat.

Aufgabe 10

Es gilt

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \binom{n+5}{5} + \binom{n+5}{6} - \binom{n+6}{n} \\
&= \binom{n+6}{6} - \binom{n+6}{n} \\
&= \binom{n+6}{6} - \binom{n+6}{6} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Wegen $f(n) = 0$ ist die Funktion nicht injektiv, da jedes Element dasselbe Bild besitzt.

Aufgabe 11a-c

a) Das Inverse von 3 in $\mathbb{Z}_{50}$ ist 17, denn $3 \cdot 17 \equiv 1 \pmod{50}$.

b) 30 ist in $\mathbb{Z}_{51}$ nicht invertierbar, da 30 und 51 nicht teilerfremd sind.

c) Das Inverse von 300 in $\mathbb{Z}_{301}$ ist 300, denn $300 \cdot 300 \equiv 1 \pmod{301}$.

Aufgabe 11d I

Bestimmen des größten gemeinsamen Teils mithilfe des Euklidischen Algorithmus:

$$\begin{aligned} 967 &= 1 \cdot 486 + 481 \\ 486 &= 1 \cdot 481 + 5 \\ 481 &= 96 \cdot 5 + 1 \\ 5 &= 5 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Rückwärtseinsetzen liefert:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot 481 - 96 \cdot 5 \\ &= 1 \cdot 481 - 96 \cdot (486 - 1 \cdot 481) \\ &= -96 \cdot 486 + 97 \cdot 481 \\ &= -96 \cdot 486 + 97 \cdot (967 - 1 \cdot 486) \\ &= 97 \cdot 967 - 193 \cdot 486 \end{aligned}$$

Aufgabe 11d II

Aus dieser Gleichheit kann insbesondere die folgende Kongruenz abgelesen werden:

$$
\begin{aligned}
1 &\equiv \underbrace{97 \cdot 967}_{\equiv 0} - 193 \cdot 486 \pmod{967} \\
&\equiv -193 \cdot 486 \pmod{967}
\end{aligned}
$$

Bei $x' = -193$ handelt es sich noch nicht um das gesuchte multiplikative Inverse, da dieser Wert kleiner als 0 ist. Das Inverse kann allerdings durch Addition des Moduls 967 erhalten werden:

$$x \equiv -193 \equiv -193 + 967 \equiv 774 \pmod{967}$$

Aufgabe 12a-b

a) Für den Graphen gilt

$$\sum_{v \in V} d(v) = 6 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 72,$$

woraus direkt $|E| = 36$ folgt.

b) Der Graph G besitzt keine Eulersche Linie, da er Knoten mit ungeradem Grad besitzt.

Aufgabe 12c

c) Es seien $n_1, \ldots, n_4$ die Anzahl der Knoten in $H_1, \ldots, H_4$. Es gilt $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n = 300$. Ein Baum mit n Knoten besitzt $n-1$ Kanten, ein Kreis mit n Knoten besitzt n Kanten. Für die Kanten in H gilt also

$$
\begin{aligned}
|E(H)| &= |E(H_1)| + |E(H_2)| + |E(H_3)| + |E(H_4)| \\
&= n_1 + (n_2 - 1) + (n_3 - 1) + (n_4 - 1) \\
&= n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - 3 \\
&= 300 - 3 \\
&= 297.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 13 I

Es existieren 3 Grundeigenschaften:

- A: Der Graph hat 4 Knoten.
- B: Der Graph hat 3 Kanten.
- C: Der Graph ist zusammenhängend.

Nach Aufgabenstellung gilt:

$$\begin{aligned} |A| &= 11 & |A \cap B| &= 3 & |A \cap B \cap C| &= 2 \\ |B| &= 4 & |A \cap C| &= 6 & & \\ |C| &= 10 & |B \cap C| &= 3 & & \end{aligned}$$

Aufgabe 13 II

Mithilfe der Siebformel ergibt sich

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ &\quad + |A \cap B \cap C| \\ &= 11 + 4 + 10 - 3 - 6 - 3 + 2 \\ &= 15. \end{aligned}$$

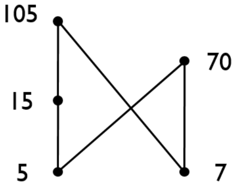
15 Graphen haben also genau 4 Knoten, genau 3 Kanten oder sind zusammenhängend.
Die verbleibenden $18 - 15 = 3$ Graphen haben keine dieser Eigenschaften.

Aufgabe 14a-b

a) $|B \times B| = 9 \Rightarrow |\mathcal{P}(B \times B)| = 2^9 = 512$

Es gibt 512 binäre Relationen auf B, also mehr als 300.

b) Es ergibt sich das folgende Hasse-Diagramm:



Aufgabe 14c-d

c) Es existiert keine Relation mit den genannten Eigenschaften.

d) Die Elemente a - f liegen alle in derselben Äquivalenzklasse. Innerhalb einer Äquivalenzklasse steht jedes Element in Relation mit jedem Element der Äquivalenzklasse. Bei S handelt es sich also um die folgende Relation:

$$S = A \times A.$$

Aufgabe 15

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 3 & 2 & 10 & 7 & 1 & 9 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \pi &= (1\ 5\ 7\ 9\ 6)(2\ 3)(4\ 10\ 8) \\ &= (1\ 5)(5\ 7)(7\ 9)(9\ 6)(2\ 3)(4\ 10)(10\ 8) \end{aligned}$$

π besitzt 7 Transpositionen und ist somit eine ungerade Permutation.

Aufgabe 16a-e

a) **Wahr**.

   Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sind gleich mächtig, folglich existieren bijektive Abbildungen.

b) **Falsch**.

   Die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind gleich mächtig, folglich existieren bijektive (und somit auch injektive) Abbildungen.

c) **Falsch**.

   Die Mächtigkeit der Menge $\mathbb{R}$ ist größer als die Mächtigkeit der Menge $\mathbb{N}$. Es kann folglich keine surjektiven Abbildungen geben.

d) **Falsch**.

   Dies ist keine hinreichende Bedingung für Hamiltonkreise.

e) **Falsch**.

   Nach dem Schubfachprinzip unmöglich. Es kann nicht zeitgleich einen Knoten mit Grad 0 und einen Knoten mit Grad 4 geben. Es verbleiben 4 mögliche Grade für 5 Knoten.

Aufgabe 16f-i

f) **Falsch**.

Es gilt bspw. für $A = \{1, 2\}$ und $R = \{(1, 1)\} \subseteq A \times A$: R ist symmetrisch und es gilt $|R| = 1$.

g) **Falsch**.

2703 und 3012 sind nicht teilerfremd; ein gemeinsamer Teiler ist bspw. 3. Folglich existiert kein Inverses.

h) **Wahr**.

Die Relation aus f) ist symmetrisch und gleichzeitig eine Ordnungsrelation.

i) **Wahr**.

Es gilt $11 \mid \underbrace{(321 - 123)}_{=198}$.