

Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Klausur am 17.02.2020
(Teil 2, Lösungen)

13. Februar 2020

>> 3

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

Aufgabe 1a-c

a)

$$|M| = 4 \Rightarrow |\mathcal{P}(M)| = 2^4 = 16$$

$$|N| = 15 \Rightarrow |\mathcal{P}(N)| = 2^{15} = 32.768$$

b)

$$\mathcal{P}(L) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

c)

$$\binom{15}{5} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 7 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 11 = 3.003$$

>> 4

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

Aufgabe 1d-f

d) Abbildungen insgesamt: $4^3 = 64$
injektive Abbildungen: $4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

e) Die nächste Zeile im Pascalschen Dreieck lautet:

1	8	28	56	70	56	28	8	1
---	---	----	----	----	----	----	---	---

f) Das Ergebnis für $n = 10.000$: 99.990.000.

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{9.998} = 2 \cdot \binom{n}{2} = n(n-1)$$

>> 2

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

>> 2

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

Aufgabe 2

- a) Es lassen sich $\binom{13}{1,2,4,1,1,1,2} = \frac{13!}{1! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!}$ mögliche Wörter aus MASSACHUSETTS bilden.
- b) Der Koeffizient lautet $\binom{12}{7} = \binom{12}{5}$.
- c) Es gibt exakt $\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}$ Möglichkeiten, genau 4 Richtige anzukreuzen.
- d) Nach dem Schubfachprinzip besitzt jede Abbildung $A \rightarrow B$ die genannte Eigenschaft. Es gibt also insgesamt 3^{11} derartige Abbildungen.
- e) Es gibt $\binom{13}{10} = \binom{13}{3}$ Möglichkeiten.

>> 5

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

Aufgabe 4

(I) Induktionsanfang:

$$\text{Für } n = 1 \text{ gilt } 4 \mid \underbrace{5^1 + 7}_{=12}. \checkmark$$

(II) Induktionsschritt:

Induktionsannahme: Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt.

$$\begin{aligned} 5^{n+1} + 7 &= 5 \cdot 5^n + 7 \\ &= \underbrace{4 \cdot 5^n + 5^n}_{4 \mid \dots} + \underbrace{7}_{4 \mid \dots} \end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt die Behauptung. \square

>> 7

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

Aufgabe 3

(I) Induktionsanfang:

$$\text{Für } n = 1 \text{ gilt } f_0^2 + f_1^2 = 0^2 + 1^2 = 1 \cdot 1 = f_1 \cdot f_2. \checkmark$$

(II) Induktionsschritt:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h. $\sum_{i=0}^n f_i^2 = f_0^2 + \dots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} f_i^2 &= \sum_{i=0}^n f_i^2 + f_{n+1}^2 \\ &= f_n \cdot f_{n+1} + f_{n+1}^2 \\ &= f_{n+1} \cdot (f_n + f_{n+1}) \\ &= f_{n+1} \cdot f_{n+2} \end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt die Behauptung. \square

>> 6

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

Aufgabe 5

(I) Induktionsanfang:

$$\text{Für } r = 5 \text{ gilt: } \sum_{j=5}^5 \binom{j}{5} = \binom{5}{5} = 1 \text{ und } \binom{5+1}{5-5} = \binom{6}{0} = 1. \checkmark$$

(II) Induktionsschritt:

Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für ein $r \geq 5$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=5}^{r+1} \binom{j}{5} &= \sum_{j=5}^r \binom{j}{5} + \binom{r+1}{5} \quad (\text{nach Induktionsannahme}) \\ &= \binom{r+1}{r-5} + \binom{r+1}{5} \quad (\text{Symmetrie der Binomialkoeffizienten}) \\ &= \binom{r+1}{-5} + \binom{r+1}{r-4} \quad (\text{Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten}) \\ &= \binom{r+2}{-4} \end{aligned}$$

Somit ist bewiesen, dass die Behauptung für alle $r \geq 5$ gilt.

>> 8

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

Aufgabe 6

Nach dem Satz von Lagrange können die Elemente nur Ordnung 1 oder Ordnung 5 haben. Ordnung 1 besitzt nur das neutrale Element. Die restlichen 4 Elemente haben Ordnung 5. Die Gruppe ist also zyklisch. Zyklische Gruppen derselben Ordnung sind immer isomorph.

>> 9

Aufgabe 8

a) Es gilt:

$$\begin{aligned} a(bdc^{-1})^{-1}bd^{-1}a(b^{-1}d^{-1}a)^{-1}a^{-1}b^{-1} &= acd^{-1}b^{-1}bd^{-1}aa^{-1}dba^{-1}b^{-1} \\ &= acd^{-1}d^{-1}dba^{-1}b^{-1} \\ &= acd^{-1}ba^{-1}b^{-1} \end{aligned}$$

b) Gilt zusätzlich das Kommutativgesetz, kann der Ausdruck weiter vereinfacht werden zu:

$$cd^{-1}$$

>> 11

Aufgabe 7

S_3 und die durch (12) erzeugte Untergruppe \mathcal{H} von S_3 lauten:

$$S_3 = \{id, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

$$\mathcal{H} = \{id, (12)\}.$$

Es ergeben sich die folgenden Linksnebenklassen:

$$id\mathcal{H} = \{id \circ id, id \circ (12)\} = \{id, (12)\}$$

$$(13)\mathcal{H} = \{(13) \circ id, (13) \circ (12)\} = \{(13), (123)\}$$

$$(23)\mathcal{H} = \{(23) \circ id, (23) \circ (12)\} = \{(23), (132)\}.$$

Die „restlichen“ Nebenklassen sind mit den bereits genannten identisch.

>> 10

Aufgabe 9a

Nachweis der Injektivität

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ 2x + 3 &= 2y + 3 \\ x &= y \end{aligned}$$

Da aus $f(x) = f(y)$ immer $x = y$ folgt, ist die Abbildung injektiv.

Nachweis der Surjektivität

Die Abbildung ist nicht surjektiv, da z.B. kein $n \in \mathbb{Z}$ existiert mit $f(n) = 2$.

>> 12

Aufgabe 9b

- ▶ $u(a, b)$ ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned}u(a, b) &= u(x, y) \\(ba, 7a + 1) &= (yx, 7x + 1)\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}ba &= yx & (1) \\7a + 1 &= 7x + 1 & (2)\end{aligned}$$

Aus (2) folgt direkt $a = x$. Einsetzen in (1) und Division durch a ($a \neq 0$ wegen $a \in \mathbb{N}$) ergibt $b = y$;

- ▶ $u(a, b)$ ist nicht surjektiv, da beispielsweise $u(a, b) = (*, 2)$ kein Urbild besitzt.

» 13

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

Aufgabe 9c II

Nachweis der Surjektivität

Sei $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}f(a - 1, 1 - a + b) &= (a - 1 + 1, a - 1 + 1 - a + b) \\ &= (a, b)\end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, dass f surjektiv ist, da zu jedem $(a, b) \in \mathbb{Z}$ ein Urbild existiert.

» 15

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

Aufgabe 9c I

Nachweis der Injektivität

$$\begin{aligned}f(x, y) &= f(w, z) \\(1 + x, x + y) &= (1 + w, w + z)\end{aligned}$$

Daraus folgt folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}(I) \quad 1 + x &= 1 + w \\(II) \quad x + y &= w + z\end{aligned}$$

Aus (I) folgt direkt $x = w$.

Setzt man dies nun in (II) ein, erhält man:

$$\begin{aligned}x + y &= x + z \\y &= z\end{aligned}$$

» 14

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

Aufgabe 9d I

Nachweis der Injektivität

$$\begin{aligned}g(a, b) &= g(c, d) \\(ab, (a + 1)b, a(b^2 + 1)) &= (cd, (c + 1)d, c(d^2 + 1))\end{aligned}$$

Daraus folgt folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}(I) \quad ab &= cd \\(II) \quad (a + 1)b &= (c + 1)d \\ab + b &= cd + d \\(III) \quad a(b^2 + 1) &= c(d^2 + 1)\end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt direkt $b = d$. Setzt man dies nun in (III) ein, erhält man:

$$\begin{aligned}a(b^2 + 1) &= c(b^2 + 1) \quad (\text{Wegen } b^2 + 1 \neq 0) \\a &= c\end{aligned}$$

Es gilt also $a = c$ und $b = d$. Damit ist bewiesen, dass g injektiv ist, da keine 2 verschiedenen Elemente dasselbe Bild haben.

» 16

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

Aufgabe 9d II

Nachweis der Surjektivität

Behauptung: $(1, 0, 0)$ hat kein Urbild.

Angenommen, es sei $g(a, b) = (1, 0, 0)$ für $a, b \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt:

$$ab = 1$$

$$a(b^2 + 1) = 0$$

Aus $a(b^2 + 1) = 0$ folgt (wegen $b^2 + 1 \neq 0$) $a = 0$, im Widerspruch zu $ab = 1$.

Damit ist bewiesen, dass g nicht surjektiv ist, da mindestens ein Element kein Urbild hat.

» 17

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

Aufgabe 11a-c

- a) Das Inverse von 3 in \mathbb{Z}_{50} ist 17, denn $3 \cdot 17 \equiv 1 \pmod{50}$.
- b) 30 ist in \mathbb{Z}_{51} nicht invertierbar, da 30 und 51 nicht teilerfremd sind.
- c) Das Inverse von 300 in \mathbb{Z}_{301} ist 300, denn $300 \cdot 300 \equiv 1 \pmod{301}$.

» 19

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

Aufgabe 10

Es gilt

$$\begin{aligned} f(n) &= \binom{n+5}{5} + \binom{n+5}{6} - \binom{n+6}{n} \\ &= \binom{n+6}{6} - \binom{n+6}{n} \\ &= \binom{n+6}{6} - \binom{n+6}{6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wegen $f(n) = 0$ ist die Funktion nicht injektiv, da jedes Element dasselbe Bild besitzt.

» 18

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

Aufgabe 11d I

Bestimmen des größten gemeinsamen Teils mithilfe des Euklidischen Algorithmus:

$$\begin{aligned} 967 &= 1 \cdot 486 + 481 \\ 486 &= 1 \cdot 481 + 5 \\ 481 &= 96 \cdot 5 + 1 \\ 5 &= 5 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Rückwärtseinsetzen liefert:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot 481 - 96 \cdot 5 \\ &= 1 \cdot 481 - 96 \cdot (486 - 1 \cdot 481) \\ &= -96 \cdot 486 + 97 \cdot 481 \\ &= -96 \cdot 486 + 97 \cdot (967 - 1 \cdot 486) \\ &= 97 \cdot 967 - 193 \cdot 486 \end{aligned}$$

» 20

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

Aufgabe 11d II

Aus dieser Gleichheit kann insbesondere die folgende Kongruenz abgelesen werden:

$$\begin{aligned} 1 &\equiv \underbrace{97 \cdot 967}_{\equiv 0} - 193 \cdot 486 \pmod{967} \\ &\equiv -193 \cdot 486 \pmod{967} \end{aligned}$$

Bei $x' = -193$ handelt es sich noch nicht um das gesuchte multiplikative Inverse, da dieser Wert kleiner als 0 ist. Das Inverse kann allerdings durch Addition des Moduls 967 erhalten werden:

$$x \equiv -193 \equiv -193 + 967 \equiv 774 \pmod{967}$$

» 21

Aufgabe 12c

- c) Es seien n_1, \dots, n_4 die Anzahl der Knoten in H_1, \dots, H_4 . Es gilt $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n = 300$. Ein Baum mit n Knoten besitzt $n-1$ Kanten, ein Kreis mit n Knoten besitzt n Kanten. Für die Kanten in H gilt also

$$\begin{aligned} |E(H)| &= |E(H_1)| + |E(H_2)| + |E(H_3)| + |E(H_4)| \\ &= n_1 + (n_2 - 1) + (n_3 - 1) + (n_4 - 1) \\ &= n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - 3 \\ &= 300 - 3 \\ &= 297. \end{aligned}$$

» 23

Aufgabe 12a-b

- a) Für den Graphen gilt

$$\sum_{v \in V} d(v) = 6 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 72,$$

woraus direkt $|E| = 36$ folgt.

- b) Der Graph G besitzt keine Eulersche Linie, da er Knoten mit ungeradem Grad besitzt.

» 22

Aufgabe 13 I

Es existieren 3 Grundeigenschaften:

- ▶ A: Der Graph hat 4 Knoten.
- ▶ B: Der Graph hat 3 Kanten.
- ▶ C: Der Graph ist zusammenhängend.

Nach Aufgabenstellung gilt:

$$\begin{array}{lll} |A| = 11 & |A \cap B| = 3 & |A \cap B \cap C| = 2 \\ |B| = 4 & |A \cap C| = 6 & \\ |C| = 10 & |B \cap C| = 3 & \end{array}$$

» 24

Aufgabe 13 II

Mithilfe der Siebformel ergibt sich

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ &\quad + |A \cap B \cap C| \\ &= 11 + 4 + 10 - 3 - 6 - 3 + 2 \\ &= 15. \end{aligned}$$

15 Graphen haben also genau 4 Knoten, genau 3 Kanten oder sind zusammenhängend.

Die verbleibenden $18 - 15 = 3$ Graphen haben keine dieser Eigenschaften.

>> 25

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

Aufgabe 14c-d

- c) Es existiert keine Relation mit den genannten Eigenschaften.
- d) Die Elemente $a - f$ liegen alle in derselben Äquivalenzklasse. Innerhalb einer Äquivalenzklasse steht jedes Element in Relation mit jedem Element der Äquivalenzklasse. Bei S handelt es sich also um die folgende Relation:

$$S = A \times A.$$

>> 27

© 2020 Steven Köhler

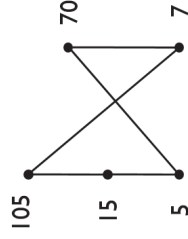
13. Februar 2020

Aufgabe 14a-b

a) $|B \times B| = 9 \Rightarrow |\mathcal{P}(B \times B)| = 2^9 = 512$

Es gibt 512 binäre Relationen auf B , also mehr als 300.

- b) Es ergibt sich das folgende Hasse-Diagramm:



>> 26

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

Aufgabe 15

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 3 & 2 & 10 & 7 & 1 & 9 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \pi &= (1\ 5\ 7\ 9\ 6)(2\ 3)(4\ 10\ 8) \\ &= (1\ 5)(5\ 7)(7\ 9)(9\ 6)(2\ 3)(4\ 10)(10\ 8) \end{aligned}$$

π besitzt 7 Transpositionen und ist somit eine ungerade Permutation.

>> 28

© 2020 Steven Köhler

13. Februar 2020

Aufgabe 16a-e

- a) **Wahr.**
Die Mengen \mathbb{N} und $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sind gleich mächtig, folglich existieren bijektive Abbildungen.
- b) **Falsch.**
Die Mengen \mathbb{Z} und \mathbb{Q} sind gleich mächtig, folglich existieren bijektive (und somit auch injektive) Abbildungen.
- c) **Falsch.**
Die Mächtigkeit der Menge \mathbb{R} ist größer als die Mächtigkeit der Menge \mathbb{N} . Es kann folglich keine surjektiven Abbildungen geben.
- d) **Falsch.**
Dies ist keine hinreichende Bedingung für Hamiltonkreise.
- e) **Falsch.**
Nach dem Schubfachprinzip unmöglich. Es kann nicht zeitgleich einen Knoten mit Grad 0 und einen Knoten mit Grad 4 geben. Es verbleiben 4 mögliche Grade für 5 Knoten.

Aufgabe 16f-i

- f) **Falsch.**
Es gilt bspw. für $A = \{1, 2\}$ und $R = \{(1, 1)\} \subseteq A \times A$: R ist symmetrisch und es gilt $|R| = 1$.
- g) **Falsch.**
2703 und 3012 sind nicht teilerfremd; ein gemeinsamer Teiler ist bspw. 3. Folglich existiert kein Inverses.
- h) **Wahr.**
Die Relation aus f) ist symmetrisch und gleichzeitig eine Ordnungsrelation.
- i) **Wahr.**
Es gilt $11 \mid \underbrace{(321 - 123)}_{=198}$.