Vorkurs: Mathematik für Informatiker

Steven Köhler

Wintersemester 2020/21
Aufgaben

I-1. Es seien die folgenden Mengen $A = \{5, 7, 9\}$, $B = \{5, 6, 7\}$ und $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ gegeben. Bestimme:

a) $A \cup B$, $A \cap C$, $C \setminus A$ sowie $A \triangle B$

b) $A \cap B \cap C$

c) $\mathcal{P}(B)$

d) $A \times B$

I-2. Bestimme die Mengen $\mathcal{P}(\emptyset)$ sowie $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$!

III-1. Berechne die folgenden Werte. Gib die Ergebnisse in vollständig gekürzter Form an!

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{10}{12}$

c) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} - \frac{3}{10}$ d) $\left(\frac{6}{7} : \frac{12}{10}\right) \cdot 2 + \frac{3}{-7}$

III-2. Gib die folgenden Ausdrücke in vollständig gekürzter Form an.

a) $\frac{3x^5}{2x^3}$ b) $\frac{a^5}{4a^4}$ c) $\frac{-(ab)^2}{(-6ab)^2}$ d) $\frac{10x^2y^3}{(-2xy)^2}$

e) $\frac{(-ab)^4}{ab^4}$ f) $\frac{-a^3b^7}{(ab)^7}$ g) $\frac{x^2(ty)^3}{xt^3y}$ h) $\frac{a^3(b^2c)^5}{(a^3c)^2}$

III-3. Vereinfache die folgenden Ausdrücke. Gib die Ergebnisse, sofern möglich, in vollständig gekürzter Form an!

a) $\frac{3}{2a^2} - \frac{4ab-1}{4ab} + 2$

b) $\frac{x}{x^2-xy} - \frac{y}{x^2+xy} - \frac{x}{x^2-y^2}$

c) $\frac{a-3b}{5a+1} \cdot \frac{25a^2-1}{a^2-6ab+9b^2}$

d) $\frac{2x-3}{5x} : \frac{4x^2-9}{10x^2}$

IV-1. Berechne die folgenden Potenzen. (Ohne Taschenrechner!)

a) 3^3 b) $(-7)^2$ c) $(-5)^3$

d) -2^4 e) $(-3 \cdot 2)^2$ f) $-(5 \cdot 3)^2$

IV-2. Vereinfache so weit wie möglich:

a) $7\sqrt{x}+\sqrt{2}\sqrt{8y}-\sqrt{16x}-4\sqrt{y}$

b) $\sqrt{\frac{11}{60}}\cdot\sqrt{\frac{12}{55}}$

c) $\sqrt{0,1}\cdot\sqrt{0,121}$

d) $(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})$

IV-3. Bestimme ohne Taschenrechner:

a) $r=\log_8 64$ b) $\log_r 125=3$

c) $\log_{10} r=3$ d) $\log_2 r=-4$

IV-4. Bestimme ohne Taschenrechner:

a) $r=\log_7 343$ b) $\ln e^{-1}=r$

c) $r=\log_2 32-\log_2 16+\log_2 8$ d) $r=\log_2\sqrt{8}$

IV-5. Die Halbwertszeit von Radium 88 beträgt 1600 Jahre. Wie lange dauert es, bis 10g zu 1,25g zerfallen sind? Erstelle zunächst eine entsprechende Funktionsgleichung.

V-1. Vereinfache die folgenden Terme:

a) $a^7\cdot a^4$ b) $5x\cdot 4x^6$

c) $(-3z^4)\cdot(-3z^5)$ d) $20x^5\cdot(-x^3)\cdot x^{-2}$

V-2. Vereinfache die folgenden Terme:

a) $a^{-3x}a^{2x}$ b) $\dfrac{x^{2-b}}{x^b}$

c) $3x^0y^{-2}$ d) $\dfrac{a^{2-x}b^{6+y}}{a^{6-x}b}$

V-3. Vereinfache die folgenden Terme:

a) $\sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[6]{x^{18}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^9}}$ c) $\sqrt[7]{a^{10}}:\sqrt[4]{a^5}$

V-4. Vereinfache die folgenden Terme:

a) $\log\left(\dfrac{a}{2b}\right)$ b) $\log\left(\dfrac{a^2c+ac}{ab}-\dfrac{c}{b}\right)$

c) $\log\left(\sqrt[3]{a^2}\right)-\log a+2\log\left(\dfrac{1}{7}a\right)$ d) $\log\left(\dfrac{a^2b^{-1}c}{ac^{-3}b}\right)$

e) $\log\left(a^3\right)+\log\left(\sqrt{b}\right)-\log\left(ab^2\right)$

VII-1. Welche der folgenden Operationen sind assoziativ? Begründe deine Antworten.

- Addition
- Subtraktion
- Multiplikation
- Division
- Potenzieren

VII-2. Welche der folgenden Operationen sind kommutativ? Begründe deine Antworten.

- Addition
- Subtraktion
- Multiplikation
- Division
- Potenzieren

VII-3. Es sei als bekannt vorausgesetzt, dass sowohl die Addition als auch die Multiplikation von ganzen Zahlen assoziativ und kommutativ ist. Zeige, dass dann auch die Addition von rationalen Zahlen assoziativ ist.

XI-1. Schreibe die folgenden Summen ohne das Summenzeichen:

$$a)\ \sum_{1\leq k\leq 4} a_k \qquad b)\ \sum_{\substack{1\leq i\leq 10\\ i:\ \text{gerade}}} a_i \qquad c)\ \sum_{\substack{0\leq j\leq 10\\ j:\ \text{ungerade}}} 2^j$$

$$d)\ \sum_{\substack{1\leq j\leq 15\\ j:\ \text{Primzahl}}} b_j \qquad e)\ \sum_{\substack{1\leq k\leq 50\\ k:\ \text{Quadratzahl}}} a_k$$

Hinweis: Es ist nicht notwendig, die Summen auszurechnen.

XI-2. Entscheide, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Begründe deine Antworten!

$$\text{a)}\ \sum_{i=2}^{n} a_i = \sum_{j=6}^{n+4} a_{j-4} \qquad \text{b)}\ \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i-1}$$

$$\text{c)}\ \sum_{i=1}^{5} i = \sum_{i=2}^{7} (i-2) \qquad \text{d)}\ \sum_{k=4}^{8} a_k = \sum_{k=4}^{8} a_{8-k}$$

XII-1. Gegeben seien die folgenden beiden Polynome $a(x)$ und $b(x)$.

$$a(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3$$
$$b(x) = x + 2$$

Berechne die folgenden Ausdrücke:

a) $a(x) + b(x)$
b) $a(x) - b(x)$
c) $a(x) \cdot b(x)$
d) $a(x) : b(x)$

XIII-1. Löse die folgenden Gleichungssysteme. Wähle dazu möglichst geschickte Verfahren und mache die Probe.

a) $$\begin{aligned} 3x - 2y + 7 &= 7 \\ x + 2y &= 5 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x &= 2y - 5 \\ 0 &= 3 - y \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} y &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x \\ y &= 1 - x \end{aligned}$$

XIII-2. a) Paul und sein Vater sind zusammen 33 Jahre alt. In 30 Jahren wird Paul halb so alt wie sein Vater sein. Wie alt sind Paul und sein Vater?

b) Michael ist jetzt halb so alt wie seine Mutter. In zwei Jahren werden beide zusammen 100 sein. Wie alt sind Michael und seine Mutter?

XIII-3. Löse die folgenden quadratischen Gleichungen.

a) $x^2 + 2x - 8 = 0$
b) $4x^2 - 8 = 20$
c) $3x^2 = x$
d) $5x^2 - 5x = 0$
e) $-49x^2 + 16x = -12$
f) $3x^2 = 2x^2 - 1$

XV-1. Beweise die folgende Behauptung: Das Quadrat einer ungeraden ganzen Zahl n ist stets ungerade.

XV-2. Beweise die folgende Behauptung: Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen (d.h. $1+2+...+n$) ist gleich $\frac{n(n+1)}{2}$.

XV-3. Ein Mensch besitzt typischerweise 100.000 bis 200.000 Haare, mit Sicherheit aber weniger als 1 Million Haare. Wie kann diese Aussage genutzt werden, um zu beweisen, dass in Hamburg mindestens zwei Menschen mit derselben Anzahl an Haaren leben?

XV-4. Beweise die folgende Aussage: Die Zahl $\sqrt{3}$ ist eine irrationale Zahl.

XV-5. Beweise die folgende Aussage: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

XV-6. Beweise die folgende Aussage mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

XV-7. Beweise die folgende Aussage mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{i=0}^{n} \big(2i+1\big) = \big(n+1\big)^2.$$

XVI-1. a) Berechne die Summe und die Differenzen der beiden Vektoren $a = (5, 0, 23)$ und $b = (4, 2, -7)$.

b) Berechne die Summe und die Differenzen der beiden Vektoren $a = (47, -8, 0)$ und $b = (3, 42)$.

XVI-2. Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (7, 5, -3)$ und $v_3 = (0, 2, 1)$. Berechne die Länge des Vektors $v = v_1 - v_2 + 3v_3$.

XVI-3. Entscheide, ob die Vektoren $v_1 = (4, -2, 5)$ und $v_2 = (-2, 4, 0)$ orthogonal sind. Begründe deine Antwort.

XVI-4. Gegeben sind die folgenden Vektoren a, b und c:

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme $a \cdot b$, $a \cdot c$ sowie $b \cdot c$. Welche der Vektoren a, b und c sind senkrecht zueinander?

b) Bestimme einen Vektor, der sowohl senkrecht zu a als auch senkrecht zu b ist. Gib diesen als normierten Vektor an.

XVII-1. Bestimme die Koordinatenform der Geraden, die durch die Punkte $P_1 = (2, 3)$ und $P_2 = (4, 4)$ verläuft.

XVII-2. Bestimme die Koordinatenform der Geraden, die durch die Punkte $P_1 = (2, 1)$, $P_2 = (6, 3)$ und $P_3 = (4, \frac{5}{2})$ verläuft.

XVII-3. Bestimme die Parameter- und die Normalenform der Geraden, die durch die Punkte $P_1 = (2, 3)$ und $P_2 = (4, 4)$ verläuft.

XVIII-1. Vereinfache die folgenden Terme soweit wie möglich.

a) $\log\left(\frac{a}{b^2}\right) - \log\left(b^{-1}\right) + \log\left(\frac{a^2}{b^{-1}}\right)$ b) $\log\left(\frac{a}{2b}\right)$

c) $\log\left(\sqrt[3]{a^2}\right) - \log(a) + 2\log\left(\frac{1}{7}a\right)$

XVIII-2. Vereinfache die folgenden Terme soweit wie möglich.

a) $a^{-3}a^3a^{-1}$ b) $\dfrac{\left(x^4z^3\right)^2}{x^6z^2}$ c) $\dfrac{7a^4b^{-6}}{49a^8b^{-3}}$

XVIII-3. Bestimme x!

a) $\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0,5}\right)^x = \dfrac{1}{8}$ *b)* $\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^x = \dfrac{1}{9}$ *c)* $\left(0,4^{0,25}\right)^x = 0,4$

XVIII-4. Beschreibe in deinen Worten, was die folgende Aussage bedeutet: „Die trigonometrischen Funktionen sind periodisch“. Gib für die folgenden Funktionen die Periodenlänge an:

$$\sin x \qquad \cos(2x) \qquad \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$$

XVIII-5. Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen.

a) $2x^2 + \frac{3}{2}x - 2 = 0$ b) $x^2 + 3x - 1 = x - 3$

c) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

XVIII-6. Gegeben sind die nachfolgenden Vektoren a und b. Bestimme x derart, dass $a \perp b$ gilt!

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}.$$