Vorkurs: Mathematik für Informatiker

Teil 3

Wintersemester 2020/21

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Inhaltsverzeichnis

Kapitel XII: Polynome

Definition I

Ein *Polynom* ist ein Ausdruck der folgenden Form:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Ein Polynom lässt sich mit dem Summenzeichen auch wie folgt darstellen:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Als *Grad des Polynoms* bezeichnet man die höchste im Polynom vorkommende Potenz n.

Definition II

Beispiele:

- $a(x) = 2x^2 + 3x - 7$
- $b(x) = -x^3 + 4$
- $c(x) = x^{10} + x^8 - x^6 + 2x^5 + 10x^4 - x + 1$
- $d(x) = 1$

Definition III

Eine *Nullstelle* eines Polynoms p ist ein Wert x_0, für den gilt:

$$p(x_0) = 0.$$

Ein Polynom vom Grad n besitzt höchstens n reelle Nullstellen (und exakt n komplexe Nullstellen) – allerdings besitzt nicht jedes Polynom reelle Nullstellen. Ein Beispiel hierfür ist das folgende *irreduzible Polynom*:

$$x^2 + 1.$$

Hat ein Polynom einen ungeraden Grad, so besitzt es stets mindestens eine reelle Nullstelle.

Addition & Subtraktion von Polynomen I

Gegeben seien zwei Polynome $a(x)$ und $b(x)$ (mit $m, n \in \mathbb{N}$):

$$a(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$b(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

Die Summe $c(x)$ dieser beiden Polynome lässt sich wie folgt berechnen (nicht vorhandene Koeffizienten a_k bzw. b_k haben per Definition den Wert 0):

$$c(x) = a(x) + b(x) = \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k + b_k)\, x^k.$$

Addition & Subtraktion von Polynomen II

Gegeben seien zwei Polynome $a(x)$ und $b(x)$ (mit $m, n \in \mathbb{N}$):

$$a(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$b(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

Die Differenz $c(x)$ dieser beiden Polynome lässt sich wie folgt berechnen (nicht vorhandene Koeffizienten a_k bzw. b_k haben per Definition den Wert 0):

$$c(x) = a(x) - b(x) = \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k - b_k)\, x^k.$$

Addition & Subtraktion von Polynomen III

Beispiel:

Gegeben seien die beiden Polynome $a(x)$ und $b(x)$.

$$\begin{aligned} a(x) &= x^3 + 2x^2 - 5x + 3 \\ b(x) &= x^2 + x - 1 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} a(x) + b(x) &= x^3 + (2+1)x^2 + (-5+1)x + (3-1) \\ &= x^3 + 3x^2 - 4x + 2 \\ a(x) - b(x) &= x^3 + (2-1)x^2 + (-5-1)x + (3-(-1)) \\ &= x^3 + x^2 - 6x + 4 \end{aligned}$$

Multiplikation von Polynomen I

Gegeben seien zwei Polynome $a(x)$ und $b(x)$ (mit $m, n \in \mathbb{N}$):

$$a(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$b(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

Das Produkt dieser beiden Polynome lässt sich auf die folgenden Arten berechnen:

$$a(x) \cdot b(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i \cdot b_j \cdot x^{i+j} \qquad \text{bzw.}$$

$$a(x) \cdot b(x) = \sum_{i=0}^{m+n} \left(x^i \cdot \sum_{k=0}^{i} (a_k \cdot b_{i-k}) \right)$$

Multiplikation von Polynomen II

Beispiel:

Gegeben seien die beiden Polynome $a(x)$ und $b(x)$.

$$\begin{aligned} a(x) &= x^3 + 2x^2 - 5x + 3 \\ b(x) &= x^2 + x - 1 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} a(x) \cdot b(x) &= x^3 \cdot x^2 + x^3 \cdot x + x^3 \cdot (-1) \\ &\quad + 2x^2 \cdot x^2 + 2x^2 \cdot x + 2x^2 \cdot (-1) \\ &\quad - 5x \cdot x^2 - 5x \cdot x - 5x \cdot (-1) \\ &\quad + 3x^2 + 3x + 3 \cdot (-1) \\ &= x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 8x - 3 \end{aligned}$$

Division von Polynomen I

Zu je zwei Polynomen $a(x)$ und $b(x)$ mit $b(x) \neq 0$ gibt es eindeutig bestimmte Polynome $q(x)$ und $r(x)$ mit $\mathrm{grad}(r(x)) < \mathrm{grad}(b(x))$ oder $r(x) = 0$, so dass

$$a(x) = q(x)b(x) + r(x)$$

gilt. Man nennt dies eine *Zerlegung mit Rest* von $a(x)$ bezüglich $b(x)$.

Division von Polynomen II

Beispiel:

Gegeben seien die beiden Polynome $a(x)$ und $b(x)$.

$$a(x) = 2x^4 + x^3 + x + 3$$
$$b(x) = x^2 + x - 1$$

Es folgt:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
 & 2x^4 & +x^3 & & +x & +3 & :(x^2+x-1) = 2x^2 - x + 3 \\
- & (2x^4 & +2x^3 & -2x^2) & & & \\
\hline
 & & -x^3 & +2x^2 & +x & +3 & \\
 & - & (-x^3 & -x^2 & +x) & & \\
\hline
 & & & 3x^2 & & +3 & \\
 & & - & (3x^2 & +3x & -3) & \\
\hline
 & & & & -3x & +6 &
\end{array}$$

Division von Polynomen III

Als Ergebnis erhält man die folgende Zerlegung mit Rest:

$$\underbrace{2x^4 + x^3 + x + 3}_{a(x)} = \underbrace{(2x^2 - x + 3)}_{q(x)} \underbrace{(x^2 + x - 1)}_{b(x)} + \underbrace{(-3x + 6)}_{r(x)}.$$

Das Ergebnis lässt sich auch wie folgt schreiben:

$$\frac{2x^4 + x^3 + x + 3}{x^2 + x - 1} = 2x^2 - x + 3 + \frac{-3x + 6}{x^2 + x - 1} \ .$$

Aufgabe XII-1

Gegeben seien die folgenden beiden Polynome $a(x)$ und $b(x)$.

$$a(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3$$
$$b(x) = x + 2$$

Berechne die folgenden Ausdrücke:

a) $a(x) + b(x)$

b) $a(x) - b(x)$

c) $a(x) \cdot b(x)$

d) $a(x) : b(x)$

Kapitel XIII: Gleichungen & Gleichungssysteme

Lösen von linearen Gleichungen

Gegeben sei die folgende *lineare Gleichung*:

$$ax + b = 0.$$

Für gegebene Werte $a, b \in \mathbb{R}$ lässt sich die einzige Lösung direkt durch Umstellen berechnen:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Lösen von quadratischen Gleichungen I

Gegeben sei die folgende *quadratische Gleichung*:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Für gegebene $p, q \in \mathbb{R}$ lässt sich die Lösung wie folgt berechnen:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Lösen von quadratischen Gleichungen II

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

- Fall 1: $\frac{p^2}{4} - q > 0$

  Es gibt genau zwei reelle Lösungen.

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

- Fall 2: $\frac{p^2}{4} - q = 0$

  Es gibt genau eine reelle Lösung.

$$x_1 = -\frac{p}{2}$$

Lösen von quadratischen Gleichungen III

- Fall 3: $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$

  Es gibt keine reellen Lösungen.

Lösen von quadratischen Gleichungen IV

Gegeben sei die folgende quadratische Gleichung:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Für gegebene $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ lässt sich die Lösung wie folgt berechnen:

$$x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}.$$

Analog zur Gleichung $x^2 + px + q = 0$ sind auch hier verschiedene Fälle zu unterscheiden. (Welche nämlich?)

Lösen von kubischen Gleichungen I

Gegeben sei die folgende kubische Gleichung:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0.$$

Division durch A führt auf die *Normalform*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a = \frac{B}{A}$, $b = \frac{C}{A}$ und $c = \frac{D}{A}$. Durch die Substitution $x = y - \frac{a}{3}$ erhält man die *reduzierte Form*

$$y^3 + py + q = 0.$$

Lösen von kubischen Gleichungen II

Die reduzierte Gleichung kann mithilfe der *Cardanischen Formeln* gelöst werden:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= u + v \\
y_2 &= -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2} \cdot i\sqrt{3} \\
y_3 &= -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2} \cdot i\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
u &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\
v &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}
\end{aligned}
$$

Lösen von kubischen Gleichungen III

Für die *Diskriminante* $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ gilt:

- <u>Fall 1: $D > 0$</u>
  Es gibt eine reelle und zwei konjugiert komplexe Lösungen.

- <u>Fall 2: $D = 0$</u>
  Es gibt drei reelle Lösungen, darunter eine Doppelwurzel.

- <u>Fall 3: $D < 0$</u>
  Es gibt drei reelle Lösungen, die sich auf goniometrischem Weg berechnen lassen.

Lösen von kubischen Gleichungen IV

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)$$
$$y_2 = -2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} - 60^\circ\right)$$
$$y_3 = -2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 60^\circ\right)$$

Der Wert φ lässt sich aus der folgenden Gleichung berechnen:

$$\cos\varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}}.$$

Die entsprechenden x-Werte folgen aus der obigen Substitution:

$$x = y + \frac{a}{3}.$$

Lösen von linearen Gleichungssystemen I

Das folgende *lineare Gleichungssystem* besteht aus zwei Gleichungen und zwei Variablen:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2. \end{aligned}$$

Als Lösung dieses Gleichungssystems zählt jedes Paar (x_0, y_0), das beide Gleichungen erfüllt.

Analog verhält es sich bei einer beliebigen Anzahl von Gleichungen und einer beliebigen Anzahl von Variablen:

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \ldots + c_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Lösen von linearen Gleichungssystemen II

Es gibt viele Möglichkeiten, ein Gleichungssystem zu lösen.

Einige Beispiele:

- Geschickte Addition oder Subtraktion der Gleichungen;
- Umstellen einer Gleichung nach einer Variable und anschließendes Einsetzen in die anderen Gleichungen;
- Gleichsetzen von zwei Gleichungen;
- *Gauß-Verfahren* (nur für lineare Gleichungssysteme, wird in der Vorlesung besprochen);
- *Gauß-Jordan-Verfahren*.

Aufgaben

Aufgabe XIII-1

Löse die folgenden Gleichungssysteme. Wähle dazu möglichst geschickte Verfahren und mache die Probe.

a) $$\begin{aligned} 3x - 2y + 7 &= 7 \\ x + 2y &= 5 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x &= 2y - 5 \\ 0 &= 3 - y \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} y &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x \\ y &= 1 - x \end{aligned}$$

Aufgaben

Aufgabe XIII-2

a) Paul und sein Vater sind zusammen 33 Jahre alt. In 30 Jahren wird Paul halb so alt wie sein Vater sein. Wie alt sind Paul und sein Vater?

b) Michael ist jetzt halb so alt wie seine Mutter. In zwei Jahren werden beide zusammen 100 sein. Wie alt sind Michael und seine Mutter?

Aufgaben

Aufgabe XIII-3

Löse das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 5 \\ -2x_1 - 5x_2 - 8x_3 &= -8 \end{aligned}$$

Aufgaben

Aufgabe XIII-4

Löse die folgenden quadratischen Gleichungen.

a) $x^2 + 2x - 8 = 0$

b) $4x^2 - 8 = 20$

c) $3x^2 = x$

d) $5x^2 - 5x = 0$

e) $-49x^2 + 16x = -12$

f) $3x^2 = 2x^2 - 1$

Kapitel XIV: Logische Verknüpfungen, Quantoren & Bedingungen

Logische Verknüpfungen I

A und B seien Aussagen, die entweder wahr oder falsch sein können.

- *Konjunktion*: $A \wedge B$

  Die Aussage $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr ist.

- *Disjunktion*: $A \vee B$

  Die Aussage $A \vee B$ ist wahr, wenn entweder A oder B wahr ist; oder natürlich auch beide.

Logische Verknüpfungen II

A und B seien Aussagen, die entweder wahr oder falsch sein können.

- *Implikation*: $A \Rightarrow B$

  Die Aussage $A \Rightarrow B$ bedeutet, dass immer, wenn A wahr ist, auch B wahr ist. („B folgt aus A.“)
- *Biimplikation*: $A \Leftrightarrow B$

  Die Aussage $A \Leftrightarrow B$ bedeutet, dass immer, wenn A wahr ist, auch B wahr ist – und umgekehrt. („genau dann wenn“)

Logische Verknüpfungen III

A sei eine Aussage, die entweder wahr oder falsch sein kann.

- *Negation*: $\overline{A}$

  Die Aussage $\overline{A}$ ist genau dann wahr, wenn die Aussage A falsch ist.

Logische Verknüpfungen IV

Beispiele:

- $A \wedge B \wedge C$
- $A \wedge (B \vee C)$
- $A \Rightarrow (\overline{B} \wedge C)$
- $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

Quantoren

Soll eine Aussage darüber getroffen werden, ob eine Bedingung für mindestens einen oder für alle Werte gilt, können sogenannte *Quantoren* verwendet werden:

- *Allquantor*: $\forall x : A$

  Der Allquantor $\forall$ besagt, dass die Aussage A für alle x gilt.

- *Existenzquantor*: $\exists x : A$

  Der Existenzquantor $\exists$ besagt, dass es mindestens ein x gibt, für das die Aussage A gilt.

Notwendige Bedingungen

Bei einer *notwendigen Bedingung* B für eine Aussage K handelt es sich um eine Bedingung, die den folgenden Eigenschaften genügt:

- Ist die Aussage K wahr, so ist auch stets die Bedingung B erfüllt.
- Ist die Bedingung B nicht erfüllt, so ist die Aussage K auf jeden Fall falsch.
- Ist die Bedingung B erfüllt, so *könnte* die Aussage K wahr sein.

Die Bedingung B ist lediglich eine erforderliche Voraussetzung für die Aussage K. Mit ihr kann stets festgestellt werden, ob die Aussage K falsch ist – sie genügt jedoch nicht, um zu entscheiden, ob K wahr ist.

Hinreichende Bedingungen

Bei einer *hinreichenden Bedingung* B für eine Aussage K handelt es sich um eine Bedingung, die den folgenden Eigenschaften genügt:

- Ist die Bedingung B erfüllt, so ist auch die Aussage K wahr.
- Die Bedingung B ist nicht notwendig. K kann wahr sein, selbst wenn B nicht erfüllt ist.
- Es ist kein Rückschluss von K auf die Bedingung B möglich.

Kapitel XV: Beweistechniken

Einleitung

Es kommt in der Mathematik (und auch in vielen Bereichen der Informatik) häufig vor, dass man in die Situation gerät, eine gefundene Behauptung beweisen zu müssen, beispielsweise:

- ein Rechengesetz;
- eine bestimmte Eigenschaft;
- eine gefundene geschlossene Formel für einen Ausdruck;
- die allgemeine Gültigkeit einer Umformung;
- etc.

Im Folgenden werden aus diesem Grund einige grundlegende Beweistechniken vorgestellt.

Konstruktive & nicht-konstruktive Beweise

Bei einem *konstruktiven Beweis* wird entweder die Lösung selbst genannt oder ein Verfahren angegeben, das zur Lösung führt; d.h., es wird *eine Lösung konstruiert*.

Bei einem *nicht-konstruktiven Beweis* wird anhand von Eigenschaften auf die Existenz einer Lösung geschlossen. Manchmal wird sogar indirekt die Annahme, es gäbe keine Lösung, zu einem Widerspruch geführt, woraus folgt, dass es eine Lösung geben muss. Aus solchen Beweisen geht (zumeist) jedoch nicht hervor, wie man die Lösung gewinnt.

Direkte & indirekte Beweise

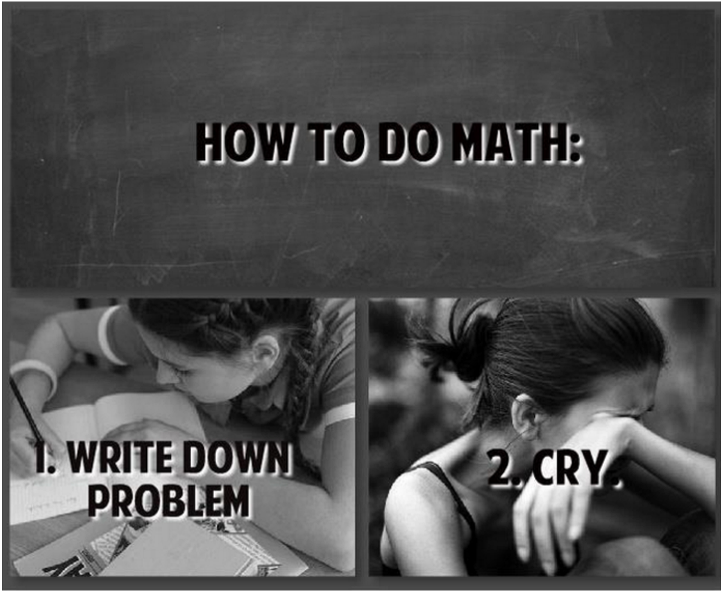
Bei einem *direkten Beweis* wird die Behauptung durch Anwendung von bereits bewiesenen Aussagen und durch logische Folgerungen bewiesen.

Bei einem *indirekten Beweis* (*Widerspruchsbeweis*) zeigt man, dass unter der Annahme, die zu beweisende Behauptung sei falsch, ein Widerspruch entsteht. Dazu nimmt man an, dass die Behauptung falsch ist und wendet anschließend dieselben Methoden wie beim direkten Beweis an. Resultiert daraus ein Widerspruch, so kann die ursprüngliche Behauptung nicht falsch sein – also muss sie richtig sein (*Satz vom ausgeschlossenen Dritten*). Eine wichtige (und keinesfalls selbstverständliche!) Voraussetzung für die Gültigkeit eines Widerspruchsbeweises ist, dass die Aussage im zugrundeliegenden System nicht zugleich wahr und falsch sein kann (*Widerspruchsfreiheit*).

Übersicht über Beweismethoden

Im Folgenden wollen wir uns mit einigen Beweisverfahren etwas näher beschäftigen:

- konstruktive Beweise
- Schubfachprinzip
- Widerspruchsbeweise
- (vollständige) Induktion


HOW TO DO MATH:
1. WRITE DOWN PROBLEM
2. CRY.

Genereller Aufbau

Ein Beweis sollte generell die folgenden Punkte enthalten:

- die zu beweisende Aussage sollte von Anfang an klar ersichtlich sein;
- einen nachvollziehbaren Beweis, in dem alle wesentlichen Rechenschritte, Umformungen, Folgerungen usw. enthalten sind;
- eine Schlussfolgerung aus dem Beweis. (Ist die Annahme richtig oder nicht?)

Konstruktive Beweise I

Nochmal zur Erinnerung:

Bei einem konstruktiven Beweis wird entweder die Lösung selbst genannt oder ein Verfahren angegeben, das zur Lösung führt; d.h., es wird eine Lösung konstruiert.

Konstruktive Beweise II

Behauptung:

Das Quadrat einer geraden ganzen Zahl n ist stets gerade.

Konstruktive Beweise III

Beweis:

Es sei n eine gerade ganze Zahl. Dann lässt sich n als $n = 2k$ darstellen, wobei k eine ganze Zahl ist. Hieraus folgt:

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot \underbrace{(2k^2)}_{\in \mathbb{Z}}.$$

Aus dieser Darstellung folgt, dass n^2 gerade ist. $\square$

Aufgaben

Aufgabe XV-1

Beweise die folgende Behauptung: Das Quadrat einer ungeraden ganzen Zahl n ist stets ungerade.

Aufgabe XV-2

Beweise die folgende Behauptung: Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen (d.h. $1 + 2 + \ldots + n$) ist gleich $\frac{n(n+1)}{2}$. Leite hierzu den Term $\frac{n(n+1)}{2}$ her.

Schubfachprinzip I

Das *Schubfachprinzip* geht auf den deutschen Mathematiker *Dirichlet* zurück und kann sehr anschaulich formuliert werden:

Verteilt man $n+1$ Gegenstände auf n Schubfächer, dann befinden sich in mindestens einem Schubfach mindestens zwei Gegenstände.

Allgemein: Verteilt man $k \cdot n + 1$ Gegenstände auf n Schubfächer, dann befinden sich in mindestens einem Schubfach mindestens $k+1$ Gegenstände.

Schubfachprinzip II

Behauptung:

Unter 13 Personen gibt es mindestens 2 Personen, die im selben Monat Geburtstag haben.

Schubfachprinzip III

Beweis:

Diese Behauptung ist leicht einzusehen. Gehen wir vom „Worst-Case-Szenario“ aus, haben die Personen alle in einem anderen Monat Geburtstag. Da das Jahr jedoch nur 12 Monate hat, können höchstens 12 Personen unterschiedliche Geburtsmonate haben. Person 13 hat auf jeden Fall im gleichen Monat wie mindestens eine der anderen 12 Personen Geburtstag, womit die Aussage bewiesen ist. □

Widerspruchsbeweise I

Nochmal zur Erinnerung:

Bei einem *Widerspruchsbeweis* zeigt man, dass unter der Annahme, die zu beweisende Aussage sei falsch, ein Widerspruch entsteht. Man schließt daraus, dass die ursprüngliche Behauptung richtig sein muss.

Widerspruchsbeweise II

Behauptung:

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.

Widerspruchsbeweise III

Beweis:

Wir wollen annehmen, dass die Behauptung falsch ist, d.h., wir nehmen an, dass es ein $a \in \mathbb{Q}$ gibt, für das $a^2 = 2$ gilt. Diese Annahme führen wir zum Widerspruch, woraus folgt, dass die ursprüngliche Aussage richtig sein muss.

Da $a \in \mathbb{Q}$ gilt, lässt sich a als Bruch darstellen, d.h., $a = \frac{m}{n}$ für $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$. Wir können o.B.d.A. voraussetzen, dass der Bruch $\frac{m}{n}$ in vollständig gekürzter Form vorliegt. Aus $a^2 = 2$ und $a = \frac{m}{n}$ folgt $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, woraus folgt:

$$m^2 = 2n^2.$$

Widerspruchsbeweise IV

Folglich ist m^2 eine gerade Zahl. Dann ist folglich auch m eine gerade Zahl, d.h., $m = 2k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Setzt man dies in $m^2 = 2n^2$ ein, so folgt $4k^2 = 2n^2$, woraus $n^2 = 2k^2$ folgt. Also ist n^2 eine gerade Zahl, woraus folgt, dass auch n gerade ist.

Demnach gilt $n = 2k'$ für ein $k' \in \mathbb{Z}$. Wir haben also $m = 2k$ und $n = 2k'$ gezeigt. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass $\frac{m}{n}$ in vollständig gekürzter Form vorliegt.

Die Annahme $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ wurde zum Widerspruch geführt, womit die ursprüngliche Aussage $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ bewiesen ist. $\square$

Aufgaben

Aufgabe XV-3

Ein Mensch besitzt typischerweise 100.000 bis 200.000 Haare, mit Sicherheit aber weniger als 1 Million Haare. Wie kann diese Aussage genutzt werden, um zu beweisen, dass in Hamburg mindestens zwei Menschen mit derselben Anzahl an Haaren leben?

Aufgabe XV-4

Beweise die folgende Aussage: Die Zahl $\sqrt{3}$ ist eine irrationale Zahl.

Aufgabe XV-5

Beweise die folgende Aussage: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Vollständige Induktion I

Vollständige Induktion ist eine häufig angewandte Methode, sowohl in der Mathematik als auch in der Informatik. Sie dient

- zum *Nachweis* der Richtigkeit von Behauptungen oder Vermutungen (vollständige Induktion als Beweismethode);
- zur *Definition* von Objekten oder Operationen (vollständige Induktion als Definitionsmethode); mit dieser Methode gewonnene Definitionen werden auch *rekursive Definitionen* genannt.

Vollständige Induktion II

Vollständige Induktion als Beweismethode wird bei Problemen der folgenden Art angewandt: Für jede natürliche Zahl n sei $A(n)$ eine Aussage. Es soll bewiesen werden, dass $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n gilt, d.h., es soll die Gültigkeit der unendlich vielen Aussagen $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$ ... nachgewiesen werden.

Vollständige Induktion III

Um eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen, genügt es, Folgendes zu zeigen:

(I) *Induktionsanfang*

$A(1)$ ist richtig.

(II) *Induktionsschritt*

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Falls $A(n)$ richtig ist, so ist auch die Aussage $A(n+1)$ richtig.

Vollständige Induktion IV

Behauptung:

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen (d.h. $1 + 2 + ... + n$) ist gleich $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Vollständige Induktion V

Beweis:

Mit vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass $A(n)$ nicht nur für bestimmte n, sondern für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(I) Induktionsanfang

$A(1)$ ist richtig, da $1 = \dfrac{1 \cdot (1+1)}{2}$ gilt.

Vollständige Induktion VI

(II) Induktionsschritt

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebig gewählte natürliche Zahl; wir setzen voraus, dass $A(n)$ für dieses n richtig ist, d.h., es gelte (für dieses n):

$$\sum_{i=1}^{n} i \;=\; \frac{n\bigl(n+1\bigr)}{2}\,. \qquad (\star)$$

Wir haben zu zeigen, dass unter dieser Voraussetzung auch $A(n+1)$ richtig ist, d.h., wir müssen Folgendes nachweisen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i \;=\; \frac{\bigl(n+1\bigr)\bigl((n+1)+1\bigr)}{2}\,.$$

Vollständige Induktion VII

Dies ergibt sich durch die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \\
&\overset{(\star)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&\overset{\text{Zusammenfassen}}{=} \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&\overset{(n+1)\text{ ausklammern}}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}
\end{aligned}$$

Damit sind (I) und (II) gezeigt; nach dem Induktionsprinzip gilt $A(n)$ also für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Aufgaben

Aufgabe XV-6

Beweise die folgende Aussage mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Aufgabe XV-7

Beweise die folgende Aussage mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2.$$