Vorkurs: Mathematik für Informatiker

Lösungen

Wintersemester 2023/24

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe I-1

Es seien $A = \{5, 7, 9\}$, $B = \{5, 6, 7\}$ und $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ gegeben. Es gilt:

a) $A \cup B = \left\{5, 6, 7, 9\right\}$

$A \cap C = \left\{5, 7, 9\right\} = A$

$C \setminus A = \left\{1, 3\right\}$

$A \triangle B = \left\{6, 9\right\}$

b) $A \cap B \cap C = \left\{5, 7\right\}$

c) $\mathcal{P}(B) = \left\{\emptyset, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}, \{5, 6, 7\}\right\}$

d) $A \times B = \left\{(5, 5), (5, 6), (5, 7), (7, 5), (7, 6), (7, 7), (9, 5), (9, 6), (9, 7)\right\}$

Aufgabe I-2

Es gilt:

a) $\mathcal{P}(\emptyset) = \left\{\emptyset\right\}$

b) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \left\{\emptyset, \{\emptyset\}\right\}$

Aufgabe III-1

Bei der Multiplikation mit einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ handelt es sich um eine Kurzschreibweise für die Addition von n gleichen Summanden. Es gilt

$$n \cdot a = \underbrace{a + \ldots + a}_{n \text{ Summanden}}.$$

Aufgabe III-2 a-b

Für die Summe $74358 + 9671 + 12345$ ergibt sich:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 7 & 4 & 3 & 5 & 8 \\
+ & & 9 & 6 & 7 & 1 \\
+ & 1_{1} & 2_{1} & 3_{1} & 4_{1} & 5 \\
\hline
= & 9 & 6 & 3 & 7 & 4
\end{array}
$$

Für die Differenz $47147 - 8959$ ergibt sich:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 4 & 7 & 1 & 4 & 7 \\
- & {}_{1} & 8_{1} & 9_{1} & 5_{1} & 9 \\
\hline
= & 3 & 8 & 1 & 8 & 8
\end{array}
$$

Aufgabe III-2 c

Für das Produkt $13579 \cdot 80105$ ergibt sich:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \cdot & 8 & 0 & 1 & 0 & 5 \\
\hline
 & 1 & {}_{1}0 & {}_{2}8 & {}_{4}6 & {}_{6}3 & {}_{7}2 & 0 & & & & & \\
+ & & & & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 0 & & & \\
+ & & & & & & 6 & {}_{1}7 & {}_{2}8 & {}_{3}9 & {}_{4}5 & & \\
\hline
= & 1 & 0 & 8 & 7 & 7 & {}_{1}4 & {}_{1}5 & {}_{1}7 & 9 & 5 & &
\end{array}
$$

Aufgabe III-2 d

Für den Quotienten $24680 : 47$ ergibt sich:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & 2 & 4 & 6 & 8 & 0 & : & 4 & 7 & = & 5 & 2 & 5 \\
- & 2 & 3 & 5 & & & & & & & & & \\
\hline
 & & 1 & 1 & 8 & & & & & & & & \\
 & - & & 9 & 4 & & & & & & & & \\
\hline
 & & & 2 & 4 & 0 & & & & & & & \\
 & & - & 2 & 3 & 5 & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & 5 & & & & & & &
\end{array}
$$

Als Ergebnis ergibt sich 525 Rest 5.

Aufgabe III-3

a) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{4}{12}+\dfrac{3}{12}=\dfrac{7}{12}$

b) $\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{24}+\dfrac{10}{12}=\dfrac{3}{24}-\dfrac{1}{24}+\dfrac{20}{24}=\dfrac{22}{24}=\dfrac{11}{12}$

c) $\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{10}=\dfrac{1}{20}-\dfrac{6}{20}=-\dfrac{5}{20}=-\dfrac{1}{4}$

d) $\left(\dfrac{6}{7}:\dfrac{12}{10}\right)\cdot 2+\dfrac{3}{-7}=\dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{10}{12}\cdot 2+\dfrac{3}{-7}=\dfrac{10}{7}-\dfrac{3}{7}=1$

e) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{6}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{7}{15}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{10}{30}+\dfrac{25}{30}+\dfrac{12}{30}+\dfrac{14}{30}+\dfrac{9}{30}=\dfrac{70}{30}=\dfrac{7}{3}$

Aufgabe III-4

a) $\frac{3}{2}x^2$ b) $\frac{a}{4}$ c) $-\frac{1}{36}$ d) $\frac{5}{2}y$

e) a^3 f) $-\frac{1}{a^4}$ g) xy^2 h) $\frac{b^{10}c^3}{a^3}$

Aufgabe III-5 a

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{2a^2} - \frac{4ab-1}{4ab} + 2 &= \frac{3 \cdot 2b - (4ab-1) \cdot a + 2 \cdot 4a^2 b}{4a^2 b} \\
&= \frac{6b - 4a^2 b + a + 8a^2 b}{4a^2 b} \\
&= \frac{4a^2 b + 6b + a}{4a^2 b}
\end{aligned}
$$

Aufgabe III-5 b

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{x^2-xy}-\frac{y}{x^2+xy}-\frac{x}{x^2-y^2} &= \frac{x}{x(x-y)}-\frac{y}{x(x+y)}-\frac{x}{(x+y)(x-y)} \\
&= \frac{x\cdot(x+y)-y\cdot(x-y)-x\cdot x}{x(x+y)(x-y)} \\
&= \frac{x^2+xy-xy+y^2-x^2}{x(x+y)(x-y)} \\
&= \frac{y^2}{x(x+y)(x-y)}
\end{aligned}
$$

Aufgabe III-5 c-d

$$\frac{a-3b}{5a+1} \cdot \frac{25a^2-1}{a^2-6ab+9b^2} = \frac{a-3b}{5a+1} \cdot \frac{(5a+1)(5a-1)}{(a-3b)^2}$$

$$= \frac{5a-1}{a-3b}$$

$$\frac{2x-3}{5x} : \frac{4x^2-9}{10x^2} = \frac{2x-3}{5x} \cdot \frac{10x^2}{(2x+3)(2x-3)}$$

$$= \frac{2x}{2x+3}$$

Aufgabe IV-1

Zunächst werden die Primfaktorzerlegungen bestimmt:

$$700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1$$

$$300 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2$$

$$126 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^1$$

Für den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache ergeben sich somit:

$$\text{ggT}\,(700, 300, 126) = 2^1 = 2$$

$$\text{kgV}\,(700, 300, 126) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 6.300$$

Aufgabe V-1

$49,6\%$ von 75 entsprechen 75% von $49,6$. Folglich gilt

$$49,6\% \cdot 75 = 75\% \cdot 49,6 = \frac{3}{4} \cdot 49,6 = 37,2.$$

Aufgabe VI-1

a) 27	b) 49	c) -125
d) -16	e) 36	f) -225

Aufgabe VI-2 a-b

$$
\begin{aligned}
7\sqrt{x} + \sqrt{2}\sqrt{8y} - \sqrt{16x} - 4\sqrt{y} &= 7\sqrt{x} - \sqrt{16x} + \sqrt{2 \cdot 8 \cdot y} - 4\sqrt{y} \\
&= 7\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 4\sqrt{y} - 4\sqrt{y} \\
&= 3\sqrt{x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{11}{60}} \cdot \sqrt{\frac{12}{55}} &= \sqrt{\frac{11 \cdot 12}{60 \cdot 55}} \\
&= \sqrt{\frac{1 \cdot 1}{5 \cdot 5}} \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

Aufgabe VI-2 c-d

$$\begin{aligned}\sqrt{0,1} \cdot \sqrt{0,121} &= \sqrt{0,0121} \\ &= 0,11\end{aligned}$$

$$(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b}) = a^2 - b$$

Aufgabe VI-3 & V-4

Aufgabe VI-3

a) $r = 2$ b) $r = 5$

c) $r = 1000$ d) $r = \frac{1}{16}$

Aufgabe VI-4

a) $r = 3$ b) $r = -1$

c) $r = 5 - 4 + 3 = 4$ d) $r = \frac{3}{2}$

Aufgabe VI-5

n entspricht 1600 Jahren. Es gilt

$$
\begin{aligned}
10g \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n &= 1,25g \\
\left(\frac{1}{2}\right)^n &= \frac{1,25g}{10g} \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt direkt, dass $n = 3$ gilt. Es dauert also $3 \cdot 1600 = 4800$ Jahre, bis die 10g Radium 88 zu 1,25g zerfallen sind.

Aufgabe VI-6

Die bewachsene Fläche verdoppelt sich jeden Tag. Da der Teich nach 30 Tagen komplett zugewachsen ist, ist er nach 29 Tagen zur Hälfte und nach 28 Tagen zu einem Viertel zugewachsen.

Aufgabe VII-1, VII-2 & VII-3

Aufgabe VII-1

a) a^{11} b) $20x^7$

c) $9z^9$ d) $-20x^6$

Aufgabe VII-2

a) a^{-x} b) x^{2-2b}

c) $\frac{3}{y^2}$ d) $a^{-4}b^{5+y}$

Aufgabe VII-3

a) x^4 b) $x^{\frac{3}{5}}$ c) $a^{\frac{5}{28}}$

Aufgabe VII-4 a-b

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a}{2b}\right) &= \log a - \log(2b)\\ &= \log a - \log b - \log 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a^2c+ac}{ab} - \frac{c}{b}\right) &= \log\left(\frac{a^2c+ac-ac}{ab}\right)\\ &= \log\left(\frac{a^2c}{ab}\right)\\ &= \log\left(ab^{-1}c\right)\\ &= \log a - \log b + \log c\end{aligned}$$

Aufgabe VII-4 c-d

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt[3]{a^2}\right) - \log a + 2\log\left(\frac{1}{7}a\right) &= \frac{2}{3}\log a - \log a + 2\left(\log\left(\frac{1}{7}\right) + \log a\right)\\ &= \frac{5}{3}\log a - 2\log 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a^2 b^{-1} c}{a c^{-3} b}\right) &= \log\left(a b^{-2} c^4\right)\\ &= \log a - 2\log b + 4\log c\end{aligned}$$

Aufgabe VII-4 e

$$
\begin{aligned}
\log\left(a^3\right) + \log\left(\sqrt{b}\right) - \log\left(ab^2\right) &= 3\log a + \frac{1}{2}\log b - \left(\log a + 2\log b\right) \\
&= 2\log a - \frac{3}{2}\log b
\end{aligned}
$$

Aufgabe VII-5

$$\log\left(\frac{\sqrt{a^2\cdot b^{-1}\cdot d\cdot a^5\cdot (c\cdot b^4)^2\cdot (c^2)^3\cdot b^{-2}}}{\sqrt[5]{(a\cdot b)^2\cdot c^{-2}\cdot d^5\cdot (b\cdot a^4)^{-3}}}\right)$$

$$=\log\left(\frac{\sqrt{a^7\cdot b^5\cdot c^8\cdot d}}{\sqrt[5]{a^{-10}\cdot b^{-1}\cdot c^{-2}\cdot d^5}}\right)$$

$$=\log\left(\sqrt{a^7\cdot b^5\cdot c^8\cdot d}\right)-\log\left(\sqrt[5]{a^{-10}\cdot b^{-1}\cdot c^{-2}\cdot d^5}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(a^7\cdot b^5\cdot c^8\cdot d\right)-\frac{1}{5}\log\left(a^{-10}\cdot b^{-1}\cdot c^{-2}\cdot d^5\right)$$

$$=\frac{7}{2}\log a+\frac{5}{2}\log b+4\log c+\frac{1}{2}\log d+2\log a+\frac{1}{5}\log b+\frac{2}{5}\log c-\log d$$

$$=\frac{11}{2}\log a+\frac{27}{10}\log b+\frac{22}{5}\log c-\frac{1}{2}\log d$$

Aufgabe IX-1

Die folgenden Operationen sind assoziativ:

- Addition
- Multiplikation

Die restlichen Operationen sind nicht assoziativ. Es können leicht unzählige Gegenbeispiele gefunden werden.

Hinweis: Die Assoziativität hängt neben der Verknüpfung auch von den verknüpften Elementen ab. Die Lösung dieser Aufgabe bezieht sich auf die gängigen Zahlenbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Aufgabe IX-2

Die folgenden Operationen sind kommutativ:

- Addition
- Multiplikation

Die restlichen Operationen sind nicht kommutativ. Es können leicht unzählige Gegenbeispiele gefunden werden.

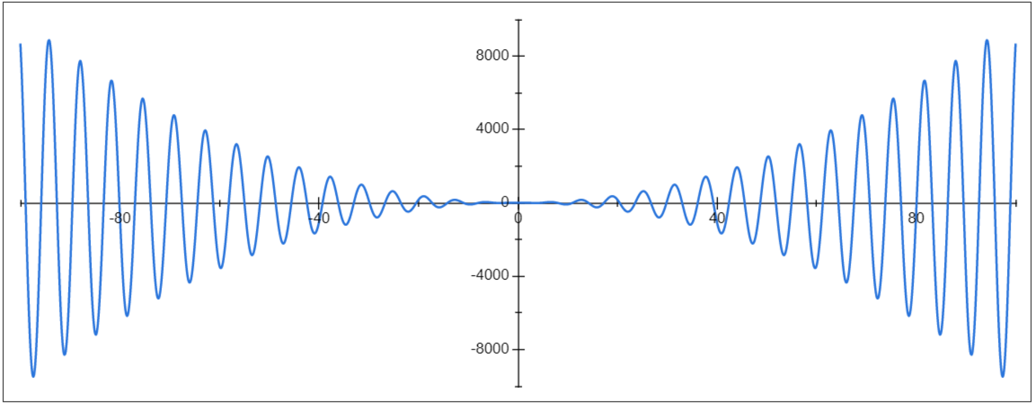
Hinweis: Die Kommutativität hängt neben der Verknüpfung auch von den verknüpften Elementen ab. Die Lösung dieser Aufgabe bezieht sich auf die gängigen Zahlenbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Aufgabe IX-3

Für rationale Zahlen $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$, $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$ und $r_3 = \frac{p_3}{q_3}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
(r_1 + r_2) + r_3 &= \left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right) + \frac{p_3}{q_3} \\
&= \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2} + \frac{p_3}{q_3} \\
&= \frac{(p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3) + p_3 q_1 q_2}{q_1 q_2 q_3} \\
&= \frac{p_1 q_2 q_3 + (p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2)}{q_1 q_2 q_3} \\
&= \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2 q_3 + p_3 q_2}{q_2 q_3} \\
&= \frac{p_1}{q_1} + \left(\frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3}\right) \\
&= r_1 + (r_2 + r_3)
\end{aligned}
$$

Aufgabe XIV-1



Aufgabe XV-1

$$\sum_{1 \leq k \leq 4} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 10 \\ i\colon \text{ gerade}}} a_i = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$$

$$\sum_{\substack{0 \leq j \leq 10 \\ j\colon \text{ ungerade}}} 2^j = 2^1 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9$$

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq 15 \\ j\colon \text{ Primzahl}}} b_j = b_2 + b_3 + b_5 + b_7 + b_{11} + b_{13}$$

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq 50 \\ k\colon \text{ Quadratzahl}}} a_k = a_1 + a_4 + a_9 + a_{16} + a_{25} + a_{36} + a_{49}$$

Aufgabe XV-2

a) wahr
b) falsch
c) wahr
d) falsch

Aufgabe XVI-1 a-c

$$a(x) + b(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$$

$$a(x) - b(x) = x^3 + 2x^2 - 6x + 1$$

$$\begin{aligned} a(x) \cdot b(x) &= x^4 + 2x^3 + 2x^3 + 4x^2 - 5x^2 - 10x + 3x + 6 \\ &= x^4 + 4x^3 - x^2 - 7x + 6 \end{aligned}$$

Aufgabe XVI-1 d

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & x^3 & +2x^2 & -5x & +3 & : (x+2) = x^2 - 5 \\
- & (x^3 & +2x^2) & & & \\
\hline
 & & & -5x & +3 & \\
 & - & & (-5x & -10) & \\
\hline
 & & & & 13 &
\end{array}
$$

Es gilt

$$x^3 + 2x^2 - 5x + 3 = (x^2 - 5) \cdot (x + 2) + 13.$$

Aufgabe XVII-1

a) $x_1 = -4$ sowie $x_2 = 2$

b) $x_1 = \sqrt{7}$ sowie $x_2 = -\sqrt{7}$

c) $x_1 = 0$ sowie $x_2 = \frac{1}{3}$

d) $x_1 = 0$ sowie $x_2 = 1$

e) $x_1 = \frac{8+2\cdot\sqrt{163}}{49}$ sowie $x_2 = \frac{8-2\cdot\sqrt{163}}{49}$

f) keine Lösung

Aufgabe XVII-2

$a)$	$x = \frac{5}{4}$	$y = \frac{15}{8}$
$b)$	$x = 1$	$y = 3$
$c)$	$x = -1$	$y = 2$

Aufgabe XVII-3 a

Es ergibt sich das folgende Gleichungssystem (p = Paul; v = Vater):

$$p + v = 33$$
$$p + 30 = \frac{1}{2}\left(v + 30\right).$$

Umformen und Auflösen des Gleichungssystems ergibt

$$p = 1 \qquad \text{und} \qquad v = 32.$$

Aufgabe XVII-3 b

Es ergibt sich das folgende Gleichungssystem (m_i = Michael; m_u = Mutter):

$$m_i = \frac{1}{2} m_u$$

$$m_i + 2 + m_u + 2 = 100.$$

Umformen und Auflösen des Gleichungssystems ergibt

$$m_i = 32 \qquad \text{und} \qquad m_u = 64.$$

Aufgabe XVII-4

Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung sowie Addition des Zweifachen der ersten zur dritten Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Subtraktion der zweiten von der dritten Gleichung liefert:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Rückwärtseinsetzen liefert die gesuchten Lösungen:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -1.$$

Aufgabe XIX-1

Es sei n eine ungerade ganze Zahl. Dann lässt sich n als $n = 2k + 1$ darstellen, wobei k eine ganze Zahl ist. Daraus folgt mithilfe der ersten binomischen Formel:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot \underbrace{(2k^2 + 2k)}_{\in \mathbb{Z}} + 1.$$

Aus dieser Darstellung folgt, dass n^2 ungerade ist. $\square$

Aufgabe XIX-2

Man berechnet zunächst die doppelte Summe. Der erste und der letzte, der zweite und der vorletzte, der dritte und der vorvorletzte (usw.) Summand ergeben in der Summe stets $n+1$:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \Big(1+2+\ldots+(n-1)+n\Big) &= (1+n)+\Big(2+(n-1)\Big)+\ldots+(n+1) \\ &= n \cdot (n+1) \end{aligned}$$

Damit wir die einfache Summe erhalten, teilen wir diesen Ausdruck durch 2 und erhalten:

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Diese Aufgabe (samt Lösung) ist auch als der „kleine Gauß“ bekannt.

Aufgabe XIX-3

Es existieren (unter Zuhilfenahme des Hinweises) 1 Million verschiedene Möglichkeiten für die Anzahl an Haaren. Da Hamburg etwa 1,8 Millionen Einwohner hat, müssen nach dem Schubfachprinzip folglich mindestens 2 Personen dieselbe Anzahl an Haaren auf dem Kopf haben.

Aufgabe XIX-4 I

Wir wollen annehmen, dass die Behauptung falsch ist, d.h., wir nehmen an, dass es ein $a \in \mathbb{Q}$ gibt, für das $a^2 = 3$ gilt. Diese Annahme führen wir zum Widerspruch, woraus folgt, dass die ursprüngliche Aussage richtig sein muss.

Da $a \in \mathbb{Q}$ gilt, lässt sich a als Bruch darstellen, d.h., $a = \frac{m}{n}$ für $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$. Wir können o.B.d.A. voraussetzen, dass der Bruch $\frac{m}{n}$ in vollständig gekürzter Form vorliegt. Aus $a^2 = 3$ und $a = \frac{m}{n}$ folgt $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 3$, woraus folgt:

$$m^2 = 3n^2.$$

Aufgabe XIX-4 II

Folglich ist m^2 eine durch 3 teilbare Zahl. Dann ist folglich auch m eine durch 3 teilbare Zahl, d.h., $m = 3k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dies folgt aus der Eigenschaft, dass es sich bei 3 um eine Primzahl handelt.

Setzt man dies in $m^2 = 3n^2$ ein, so folgt $9k^2 = 3n^2$, woraus $n^2 = 3k^2$ folgt. Also ist n^2 eine durch 3 teilbare Zahl, woraus folgt, dass auch n durch 3 ist.

Demnach gilt $n = 3k'$ für ein $k' \in \mathbb{Z}$. Wir haben also $m = 3k$ und $n = 3k'$ gezeigt. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass $\frac{m}{n}$ in vollständig gekürzter Form vorliegt.

Die Annahme $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ wurde zum Widerspruch geführt, womit die ursprüngliche Aussage $\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ bewiesen ist. $\square$

Aufgabe XIX-5

Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, \dots, p_n$. Man multipliziert die Primzahlen $p_1, \dots, p_n$ und addieren 1:

$$p = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1.$$

Die so entstandene Zahl p ist durch keine der Primzahlen $p_1, \dots, p_n$ teilbar. Wegen $p > 1$ besitzt p also entweder einen Primfaktor, der nicht in $p_1, \dots, p_n$ enthalten ist, oder ist selbst eine Primzahl. Beide Fälle stellen einen Widerspruch zur Annahme dar, dass $p_1, \dots, p_n$ alle existierenden Primzahlen sind.

Dies beweist, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe XIX-6 I

Beweis:

Mit vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass $A(n)$ nicht nur für bestimmte $n \in \mathbb{N}$, sondern für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(I) Induktionsanfang

$A(1)$ ist richtig, da $1^3 = \dfrac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4}$ gilt.

Aufgabe XIX-6 II

(II) <u>Induktionsschritt</u>

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebig gewählte natürliche Zahl; wir setzen voraus, dass $A(n)$ für dieses n richtig ist, d.h., es gelte für dieses n:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2 \left(n+1\right)^2}{4} . \qquad (\star)$$

Wir haben zu zeigen, dass unter dieser Voraussetzung auch $A(n+1)$ richtig ist, d.h., wir müssen Folgendes nachweisen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{\left(n+1\right)^2 \left(n+2\right)^2}{4} .$$

Aufgabe XIX-6 III

Dies ergibt sich durch folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 \\
&\overset{(\star)}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&\overset{\text{Zusammenfassen}}{=} \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&\overset{(n+1)^2 \text{ ausklammern}}{=} \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

Damit sind (I) und (II) gezeigt; nach dem Induktionsprinzip gilt $A(n)$ also für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Aufgabe XIX-7 I

Beweis:

Mit vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass $A(n)$ nicht nur für bestimmte $n \in \mathbb{N}$, sondern für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(I) Induktionsanfang

$A(0)$ ist richtig, da $2 \cdot 0 + 1 = 1 = (0+1)^2$ gilt.

Aufgabe XIX-7 II

(II) Induktionsschritt

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebig gewählte natürliche Zahl; wir setzen voraus, dass $A(n)$ für dieses n richtig ist, d.h., es gelte für dieses n:

$$\sum_{i=0}^{n} (2i+1) \;=\; (n+1)^2 \,. \qquad (\star)$$

Wir haben zu zeigen, dass unter dieser Voraussetzung auch $A(n+1)$ richtig ist, d.h., wir müssen Folgendes nachweisen:

$$\sum_{i=0}^{n+1} (2i+1) \;=\; (n+2)^2.$$

Aufgabe XIX-7 III

Dies ergibt sich durch folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) &= \sum_{i=0}^{n}(2i+1)+(2n+3) \\
&\overset{(\star)}{=} (n+1)^2+(2n+3) \\
&= n^2+2n+1+2n+3 \\
&= n^2+4n+4 \\
&= (n+2)^2
\end{aligned}$$

Damit sind (I) und (II) gezeigt; nach dem Induktionsprinzip gilt $A(n)$ also für alle $n \in \mathbb{N}$.
$\square$

Aufgabe XX-1

a) Es ergibt sich:

$$a + b = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$a - b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$b - a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -30 \end{pmatrix}.$$

b) Es gilt $a \in \mathbb{R}^3$ und $b \in \mathbb{R}^2$. Da nur Vektoren gleicher Dimension addiert/subtrahiert werden können, ist diese Aufgabe nicht lösbar.

Aufgabe XX-2

Es ist

$$v = v_1 - v_2 + 3v_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt

$$|v| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 9^2} = \sqrt{126} = 3 \cdot \sqrt{14}.$$

Aufgabe XX-3

Zwei Vektoren sind genau dann senkrecht zueinander (orthogonal), wenn ihr Skalarprodukt gleich 0 ist. Es gilt

$$v_1 \cdot v_2 = 4 \cdot (-2) + (-2) \cdot 4 + 5 \cdot 0 = -16.$$

Die beiden Vektoren v_1 und v_2 sind also nicht senkrecht zueinander.

Aufgabe XX-4

a) Es gilt

$$a \cdot b = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 = 0$$
$$a \cdot c = 3 \cdot (-6) + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 = -22$$
$$b \cdot c = (-1) \cdot (-6) + 5 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = 0.$$

Es gilt also $a \perp b$ sowie $b \perp c$. a und c sind nicht orthogonal.

b) $c = a \times b$ ist senkrecht zu a und senkrecht zu b. c' ist der zu c gehörende normierte Vektor:

$$c = a \times b = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 16 \end{pmatrix} \qquad c' = \frac{1}{\sqrt{330}} \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe XXI-1 a-b

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a}{2b}\right) &= \log a - \log(2b)\\ &= \log a - \log b - \log 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a}{b^2}\right) - \log\left(b^{-1}\right) + \log\left(\frac{a^2}{b^{-1}}\right) &= \log a - 2\log b + \log b + 2\log a + \log b\\ &= 3\log a\end{aligned}$$

Aufgabe XXI-1 c

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt[3]{a^2}\right) - \log a + 2\log\left(\frac{1}{7}a\right) &= \frac{2}{3}\log a - \log a + 2\left(\log\left(\frac{1}{7}\right) + \log a\right)\\ &= \frac{5}{3}\log a - 2\log 7\end{aligned}$$

Aufgabe XXI-2

$$a^{-3}a^{3}a^{-1} = a^{-1}$$

$$\begin{aligned}\frac{(x^4z^3)^2}{x^6z^2} &= \frac{x^8z^6}{x^6z^2}\\ &= x^2z^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{7a^4b^{-6}}{49a^8b^{-3}} &= \frac{b^{-3}}{7a^4}\\ &= \frac{1}{7}a^{-4}b^{-3}\end{aligned}$$

Aufgabe XXI-3

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{0{,}5}\right)^{x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}x}$$

Setzt man $x = 6$ ein, erhält man:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}\cdot 6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}$$

Analog erhält man für b) $x = -2$ sowie für c) $x = 4$.

Aufgabe XXI-4

Eine Funktion ist periodisch, wenn sie sich auf dem gesamten Definitionsbereich in regelmäßigen Abständen wiederholt.

- Periode von $\sin x$: 2π
- Periode von $\cos 2x$: π
- Periode von $\sin \frac{1}{3}x$: 6π

Aufgabe XXI-5

a) $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{73}}{8}$ sowie $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{73}}{8}$

b) keine Lösung

c) Durch Ausprobieren erhält man die erste Nullstelle $x_1 = 1$. Anschließende Polynomdivision und pq-Formel ergibt die restlichen Nullstellen: $x_2 = -1$ sowie $x_3 = -2$.

Aufgabe XXI-6

Zunächst bestimmt man das Skalarprodukt von a und b und setzt dieses gleich 0.

$$0 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot x.$$

Umstellen nach x ergibt:

$$x = -\frac{2}{3} \; .$$

Für $x = -\frac{2}{3}$ sind die beiden Vektoren senkrecht zueinander.