Vorkurs: Mathematik für Informatiker

Teil 1

Wintersemester 2023/24

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I: Mengen

Definition

Eine *Menge* ist eine ungeordnete Ansammlung von Elementen:

- Die Reihenfolge der Elemente spielt keine Rolle.
- Jedes Element ist genau einmal enthalten.

Dürfen die Elemente mehrfach vorkommen, so spricht man von einer *Multimenge*.

Enthält die Menge keine Elemente, so nennt man sie die *leere Menge* und bezeichnet sie mit $\emptyset$.

Endliche & unendliche Mengen I

Enthält die Menge eine endliche Anzahl an Elementen, so spricht man von einer *endlichen Menge*.

Analog: Enthält die Menge eine unendliche Anzahl an Elementen, so spricht man von einer *unendlichen Menge*.

Endliche & unendliche Mengen II

Beispiele für endliche Mengen:

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- $B = \{a, b, c\}$
- $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 23 \leq x \leq 42\}$

Beispiele für unendliche Mengen:

- $D = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist gerade}\}$

Elemente einer Menge

Ist das Element a in der Menge A enthalten, so schreibt man:

$$a \in A.$$

Ist das Element a nicht in der Menge A enthalten, so schreibt man:

$$a \notin A.$$

Mächtigkeit einer Menge

Unter der *Mächtigkeit* $|M|$ einer (endlichen) Menge M versteht man die Anzahl der in M enthaltenen Elemente. Die Mächtigkeit einer Menge wird auch als *Kardinalität* bezeichnet.

Für die Mächtigkeit einer unendlichen Menge schreibt man häufig ∞.

Beispiele:

$$A = \left\{11, 13, 17, 19\right\}$$

$$\left|A\right| = 4$$

$$B = \left\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\right\}$$

$$\left|B\right| = \infty$$

Vergleichen von Mengen I

Mengen können miteinander verglichen werden.

- *Inklusion*: $A \subseteq B$

  Die Menge A ist vollständig in der Menge B enthalten. Es ist außerdem möglich, dass A und B identisch sind.
  Sprechweise: A ist eine *Teilmenge* von B.

- *Gleichheit*: $A = B$

  Die Mengen A und B sind identisch. Dies ist genau dann der Fall, wenn sowohl $A \subseteq B$ als auch $B \subseteq A$ gilt.
  Sprechweise: A ist gleich B.

Vergleichen von Mengen II

- *strenge Inklusion*: $A \subset B$

  Die Menge A ist vollständig in der Menge B enthalten. Die Mengen A und B sind jedoch nicht identisch. Jedes Element $a \in A$ ist folglich in B enthalten, es gibt jedoch mindestens ein Element $b \in B$, dass nicht in der Menge A enthalten ist.
  Sprechweise: A ist eine *echte Teilmenge* von B.

Trifft keine der genannten Eigenschaften zu, so sind die Mengen *unvergleichbar*.

Operationen auf Mengen I

- *Vereinigung*: $A \cup B$

In der Menge $A \cup B$ sind alle Elemente enthalten, die entweder in der Menge A, in der Menge B oder in beiden Mengen vorkommen:

$$A \cup B = \Big\{ x \;\Big|\; x \in A \text{ oder } x \in B \Big\}.$$

Die *Vereinigungsmenge* von $n \geq 2$ Mengen $A_1, \ldots, A_n$ kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{n} A_i &= A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \\ &= \Big\{ x \;\Big|\; x \in A_1 \text{ oder } x \in A_2 \text{ oder } \ldots \text{ oder } x \in A_n \Big\}. \end{aligned}$$

Operationen auf Mengen II

- *Schnitt*: $A \cap B$

  In der Menge $A \cap B$ sind alle Elemente enthalten, die sowohl in der Menge A als auch in der Menge B vorkommen:

  $$A \cap B = \left\{ x \;\middle|\; x \in A \text{ und } x \in B \right\}.$$

  Die *Schnittmenge* von $n \geq 2$ Mengen $A_1, \ldots, A_n$ kann auch wie folgt geschrieben werden:

  $$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^{n} A_i &= A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \\ &= \left\{ x \;\middle|\; x \in A_1 \text{ und } x \in A_2 \text{ und } \ldots \text{ und } x \in A_n \right\}. \end{aligned}$$

Operationen auf Mengen III

- *Exklusion*: $A \setminus B$

  In der Menge $A \setminus B$ sind alle Elemente enthalten, die in der Menge A, aber nicht in der Menge B vorkommen:

  $$A \setminus B = \Big\{ x \;\Big|\; x \in A \text{ und } x \notin B \Big\}.$$

- *Symmetrische Differenz*: $A \triangle B$

  In der Menge $A \triangle B$ sind alle Elemente enthalten, die entweder nur in der Menge A oder nur in der Menge B vorkommen:

  $$A \triangle B = \Big(A \setminus B \Big) \cup \Big(B \setminus A \Big).$$

Operationen auf Mengen IV

- *Kartesisches Produkt*: $A \times B$

  Es seien A und B zwei Mengen. Das *kartesische Produkt* dieser Mengen ist wie folgt definiert:

  $$A \times B = \Big\{(a, b) \;\Big|\; a \in A \text{ und } b \in B\Big\}.$$

  Es seien A, B und C drei Mengen. Das *kartesische Produkt* dieser Mengen ist wie folgt definiert:

  $$A \times B \times C = \Big\{(a, b, c) \;\Big|\; a \in A,\ b \in B \text{ und } c \in C\Big\}.$$

  Analog definiert man das *kartesische Produkt* für eine beliebige Anzahl von Mengen $A_1, \dots, A_n$:

  $$A_1 \times \ldots \times A_n = \Big\{(a_1, \dots, a_n) \;\Big|\; a_1 \in A_1,\ \dots,\ a_n \in A_n\Big\}.$$

Operationen auf Mengen V

- *Potenzmenge*: $\mathcal{P}(A)$

  Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ ist die Menge aller Teilmengen der Menge A. Enthält die Menge A insgesamt $|A| = n$ Elemente, so enthält die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ insgesamt $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ Elemente.

Operationen auf Mengen VI

Beispiel:

Es seien die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$ gegeben. Dann gilt:

$$A \cup B = \left\{1, 2, 3, 4\right\}$$

$$A \cap B = \left\{2, 3\right\}$$

$$A \setminus B = \left\{1\right\}$$

$$A \triangle B = \left\{1, 4\right\}$$

$$A \times B = \left\{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\right\}$$

$$\mathcal{P}(A) = \left\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\right\}$$

Aufgaben

Aufgabe I-1

Es seien die folgenden Mengen $A = \{5, 7, 9\}$, $B = \{5, 6, 7\}$ und $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ gegeben. Bestimme:

a) $A \cup B$, $A \cap C$, $C \setminus A$ sowie $A \triangle B$

b) $A \cap B \cap C$

c) $\mathcal{P}(B)$

d) $A \times B$

Aufgabe I-2

Bestimme die Potenzmengen $\mathcal{P}(\emptyset)$ sowie $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$!

Kapitel II: Zahlenbereiche

Natürliche Zahlen

Man definiert die Menge $\{1, 2, 3, \ldots\}$ als die Menge der *natürlichen Zahlen* und bezeichnet diese mit $\mathbb{N}$.

Achtung: Je nach Lehrbuch/Dozent wird die 0 zu den natürlichen Zahlen gezählt oder nicht zu den natürlichen Zahlen gezählt. Fragt deshalb am besten noch einmal nach.

Peano-Axiome I

Die natürlichen Zahlen können bspw. über die *Peano-Axiome* formal definiert werden. Giuseppe Peano betrachtete ursprünglich 1 als kleinste natürliche Zahl. In seiner späteren Version der Axiome, die im Folgenden modern notiert sind, ersetzte er 1 durch 0. Die Axiome haben dann folgende Form:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $\forall n(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N})$
3. $\forall n(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \neq 0)$
4. $\forall n, m(m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (m' = n' \Rightarrow m = n))$
5. $\forall X(0 \in X \wedge \forall n(n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n \in X \Rightarrow n' \in X)) \Rightarrow \mathbb{N} \in X)$

Peano-Axiome II

Die Peano-Axiome können verbal wie folgt formuliert werden:

1. 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl n' als Nachfolger.
3. 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.
5. Enthält die Menge X die 0 und mit jeder natürlichen Zahl $n \in X$ auch deren Nachfolger n', so bilden die natürlichen Zahlen eine Teilmenge von X. (*Induktionsaxiom*)

Ganze Zahlen I

Ausgehend von den bereits definierten natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ definiert man die Menge der *ganzen Zahlen* und bezeichnet diese mit $\mathbb{Z}$:

- Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ fügt man der Menge $\mathbb{Z}$ sowohl n als auch $-n$ hinzu.
- Außerdem fügt man der Menge $\mathbb{Z}$ die Zahl 0 hinzu.

Es ergibt sich die folgende Menge $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \Big\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\Big\}.$$

Ganze Zahlen II

Frage:

Gibt es mehr natürliche oder mehr ganze Zahlen?

Ganze Zahlen III

Antwort:

Es gibt gleich viele natürliche und ganze Zahlen.

Rationale Zahlen I

Den nächsten Zahlenbereich bilden die mit $\mathbb{Q}$ bezeichneten *rationalen Zahlen*. Diese sind wie folgt definiert:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \text{ mit } n \neq 0 \right\}.$$

Die rationalen Zahlen stellen folglich die Menge aller Brüche dar, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind.

Rationale Zahlen II

Frage:

Gibt es mehr natürliche oder mehr rationale Zahlen?

Rationale Zahlen III

Antwort:

Es gibt gleich viele natürliche und rationale Zahlen Zahlen.

Reelle Zahlen I

Es gibt (unendlich viele) Zahlen, die nicht in der Menge der rationalen Zahlen enthalten sind. Um diese beschreiben zu können, werden die mit $\mathbb{R}$ bezeichneten *reellen Zahlen* eingeführt.

Diese können als Punkte auf einer *Zahlengeraden* veranschaulicht werden. Wie diese genau definiert sind, wollen wir an dieser Stelle nicht besprechen.

Beispiele:

- alle natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen
- die Kreiszahl π
- viele Wurzeln wie $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ oder $\sqrt[3]{4}$

Reelle Zahlen II

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ können durch *Axiome* beschrieben werden:

- Die reellen Zahlen sind ein *Körper*.
- Die reellen Zahlen sind *total geordnet*, d.h., für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:
  - Es gilt genau eine der Beziehungen $a < b$, $a = b$, $b < a$.
  - Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.
  - Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$.
  - Aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $ac < bc$.
- Die reellen Zahlen sind *ordnungsvollständig*, d.h., jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein *Supremum* in $\mathbb{R}$.

Irrationale Zahlen

Reelle Zahlen, die keine rationalen Zahlen sind (z.B. $\sqrt{2}$, π oder e), werden *irrationale Zahlen* genannt und können mit $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ bezeichnet werden.

Einen Beweis, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist, werden wir uns später im Kapitel über Beweistechniken näher ansehen.

Reelle Zahlen III

Frage:

Gibt es mehr natürliche oder mehr reelle Zahlen?

Reelle Zahlen IV

Antwort:

Es gibt mehr reelle Zahlen. Dies kann bspw. durch den *Cantorschen Diagonalisierungsbeweis* gezeigt werden.

Komplexe Zahlen

Viele technische oder physikalische Vorgänge können im Bereich der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nicht beschrieben werden.

Um dies dennoch zu ermöglichen, wurden die *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$ eingeführt. Diese definieren u.a. die Konstante i, die sog. *imaginäre Einheit*, die der folgenden Eigenschaft genügt:

$$i^2 = -1.$$

Mithilfe der imaginären Einheit i ist es möglich, Wurzeln aus negativen Zahlen formal darzustellen und physikalische/technische Systeme mit mathematischen Mitteln exakt zu beschreiben. Komplexe Zahlen werden im Laufe des Studiums besprochen.

Kapitel III: Rechnen mit natürlichen/ganzen Zahlen & Brüchen

Aufgaben

Aufgabe III-1

Welche Operation wird mithilfe der Multiplikation mit einer natürlichen Zahl abkürzend dargestellt?

Aufgaben

Aufgabe III-2

Berechne die folgenden Ausdrücke!

a) $74358 + 9671 + 12345$

b) $47147 - 8959$

c) $13579 \cdot 80105$

d) $24680 : 47$

Kürzen I

Im Folgenden seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und es gelte $c \neq 0$.

Es ist möglich, gemeinsame Faktoren (ungleich 0), die sowohl im Zähler als auch im Nenner eines Bruchs vorkommen, zu *kürzen*. Allgemein gilt:

$$\frac{c \cdot a}{c \cdot b} = \frac{a}{b} \quad (\text{für } c \neq 0).$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{4} &= \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \\
\frac{14}{21} &= \frac{7 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{2}{3} \\
\frac{a^2 b}{ab^2} &= \frac{ab \cdot a}{ab \cdot b} = \frac{a}{b}
\end{aligned}$$

Kürzen II

Es dürfen ausschließlich gemeinsame Faktoren gekürzt werden, jedoch nicht Differenzen oder Summen. Diese müssen, sofern möglich, vor dem Kürzen in ein Produkt überführt werden.

Beispiele:

$$\frac{ac+2bc}{cd-ce}=\frac{c\cdot(a+2b)}{c\cdot(d-e)}=\frac{a+2b}{d-e}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a+b}{a-b}$$

Merke:

- „Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen.“

Kürzen III

Kürzen von 0 führt zu „interessanten“ (und falschen!) Ergebnissen, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$
\begin{aligned}
\frac{0}{0} &= \frac{100 - 100}{100 - 100} \\
&= \frac{10 \cdot 10 - 10 \cdot 10}{10 \cdot 10 - 10 \cdot 10} \\
&= \frac{10^2 - 10^2}{10 \cdot (10 - 10)} \\
&= \frac{(10 + 10) \cdot \cancel{(10 - 10)}}{10 \cdot \cancel{(10 - 10)}} \\
&= \frac{10 + 10}{10} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Erweitern

Im Folgenden seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und es gelte $c \neq 0$.

Es ist möglich, den Zähler und den Nenner eines Bruchs mit demselben Faktor ungleich 0 zu multiplizieren („den Bruch zu *erweitern*"), ohne den Wert des Bruchs zu verändern. Allgemein gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{c \cdot b} \quad (\text{für } c \neq 0).$$

<u>Beispiele:</u>

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} \\ \frac{2}{4} &= \frac{8 \cdot 2}{8 \cdot 4} = \frac{16}{32} \\ \frac{a^2}{b} &= \frac{ab^2 \cdot a^2}{ab^2 \cdot b} = \frac{a^3 b^2}{ab^3} \end{aligned}$$

Addition & Subtraktion I

Im Folgenden seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ und es gelte $c \neq 0$ sowie $d \neq 0$. Es können 2 mögliche Fälle auftreten:

- Fall 1: gleiche Nenner

  Die beiden Brüche haben denselben Nenner; es gilt:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

Addition & Subtraktion II

- <u>Fall 2: verschiedene Nenner</u>

  Die beiden Brüche haben nicht denselben Nenner, sie müssen vor der Addition/Subtraktion *gleichnamig* gemacht werden („auf denselben Nenner gebracht werden“). Es gilt:

  $$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

  Oft wird beim gleichnamig machen das *kleinste gemeinsame Vielfache* (kgV) der Nenner als gemeinsamer Nenner verwendet; selbstverständlich kann auch jedes andere gemeinsame Vielfache verwendet werden.

Multiplikation

Im Folgenden seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ und es gelte $b \neq 0$ sowie $d \neq 0$.

Beim Multiplizieren zweier Brüche werden sowohl die Zähler als auch die Nenner der beiden Brüche miteinander multipliziert. Es gilt:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \, .$$

Division

Im Folgenden seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ und es gelte $b \neq 0$, $c \neq 0$ und $d \neq 0$.

Die Division von Brüchen wird auf die Multiplikation von Brüchen zurückgeführt. Hierzu wird der erste Bruch (der *Divident*) mit dem Umkehrwert (dem *Reziproken*) des zweiten Bruchs (dem *Divisor*) multipliziert. Es folgt

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \ .$$

Aufgaben

Aufgabe III-3

Berechne die folgenden Werte. Gib die Ergebnisse in vollständig gekürzter Form an!

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{10}{12}$

c) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} - \frac{3}{10}$

d) $\left(\frac{6}{7} : \frac{12}{10}\right) \cdot 2 + \frac{3}{-7}$

e) $\frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{2}{5} + \frac{7}{15} + \frac{3}{10}$

Aufgaben

Aufgabe III-4

Gib die folgenden Ausdrücke in vollständig gekürzter Form an.

a) $\dfrac{3x^5}{2x^3}$ b) $\dfrac{a^5}{4a^4}$ c) $\dfrac{-(ab)^2}{(-6ab)^2}$ d) $\dfrac{10x^2y^3}{(-2xy)^2}$

e) $\dfrac{(-ab)^4}{ab^4}$ f) $\dfrac{-a^3b^7}{(ab)^7}$ g) $\dfrac{x^2(ty)^3}{xt^3y}$ h) $\dfrac{a^3(b^2c)^5}{(a^3c)^2}$

Aufgaben

Aufgabe III-5

Vereinfache die folgenden Ausdrücke. Gib die Ergebnisse, sofern möglich, in vollständig gekürzter Form an!

a) $\dfrac{3}{2a^2} - \dfrac{4ab-1}{4ab} + 2$

b) $\dfrac{x}{x^2-xy} - \dfrac{y}{x^2+xy} - \dfrac{x}{x^2-y^2}$

c) $\dfrac{a-3b}{5a+1} \cdot \dfrac{25a^2-1}{a^2-6ab+9b^2}$

d) $\dfrac{2x-3}{5x} : \dfrac{4x^2-9}{10x^2}$

Kapitel IV: Größter gemeinsamer Teiler & kleinstes gemeinsames Vielfaches

Größter gemeinsamer Teiler

Der *größte gemeinsame Teiler (ggT)* zweier Zahlen kann über ihre *Primfaktorzerlegung* bestimmt werden. Hierfür verwendet man die Primfaktoren, die in beiden Zerlegungen vorkommen, und als zugehörigen Exponenten den jeweils kleineren der Ausgangsexponenten:

$$3.780 = 2^{2} \cdot 3^{3} \cdot 5^{1} \cdot 7^{1}$$
$$3.600 = 2^{4} \cdot 3^{2} \cdot 5^{2}$$

Für den ggT ergibt sich folglich:

$$\mathrm{ggT}(3.600, 3.780) = 2^{2} \cdot 3^{2} \cdot 5^{1} = 180.$$

Alternativ kann der ggT mithilfe des *Euklidischen Algorithmus* berechnet werden. Dieser wird im Studium besprochen.

Kleinstes gemeinsames Vielfaches

Das *kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)* zweier Zahlen kann über ihre *Primfaktorzerlegung* bestimmt werden. Hierfür verwendet man die Primfaktoren, die in den Zerlegungen vorkommen, und als zugehörigen Exponenten den jeweils größeren der Ausgangsexponenten:

$$3.780 = 2^{2} \cdot 3^{3} \cdot 5^{1} \cdot 7^{1}$$
$$3.600 = 2^{4} \cdot 3^{2} \cdot 5^{2}$$

Für den kgV ergibt sich folglich:

$$\text{kgV}(3.600, 3.780) = 2^{4} \cdot 3^{3} \cdot 5^{2} \cdot 7^{1} = 75.600.$$

Alternativ kann der kgV mithilfe des ggT berechnet werden.

Zusammenhang zwischen ggT und kgV

Für zwei Zahlen a und b gilt der folgende Zusammenhang zwischen dem größten gemeinsamen Teiler und dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen:

$$a \cdot b = \mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{kgV}(a, b).$$

Dies kann insbesondere benutzt werden, um das kleinste gemeinsame Vielfache effizient (d.h. ohne Primfaktorzerlegung) mithilfe des Euklidischen Algorithmus zu bestimmen. Es gilt:

$$\mathrm{kgV}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\mathrm{ggT}(a, b)}$$

Aufgaben

Aufgabe IV-1

Bestimme die folgenden Ausdrücke.

a) $\mathrm{ggT}\,(700, 300, 126)$

b) $\mathrm{kgV}\,(700, 300, 126)$

Kapitel V: Prozentrechnung

Definition I

Zahlangaben in *Prozent* (von lateinisch-italienisch *per cento*, „pro Hundert“) sollen Größenverhältnisse veranschaulichen und vergleichbar machen, indem die Größen in Relation zu einem einheitlichen Grundwert gesetzt werden.

Prozentangaben werden durch das *Prozentzeichen* % kenntlich gemacht.

Definition II

Das Prozentzeichen lässt sich mathematisch als einstelliger Postfix-Operator definieren, der den davorstehenden *Prozentfuß* (auch *Prozentzahl* genannt) durch 100 teilt und ihm somit dem entsprechenden Prozentsatz zuordnet. Er kann durch eine lineare Funktion auf den reellen Zahlen definiert werden:

$$\begin{aligned} \% : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto \frac{p}{100}. \end{aligned}$$

Beispiele

- Ein Prozent entspricht einem Hundertstel:

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01.$$

- Hundert Prozent ist ein Ganzes:

$$100\% = \frac{100}{100} = 1.$$

- 25 Prozent entspricht einem Viertel:

$$25\% = \frac{25}{100} = 0,25.$$

Aufgaben

Aufgabe V-1

Berechne $49,6\%$ Prozent von 75. (Ohne Taschenrechner!)

Kapitel VI: Wurzeln, Potenzen & Logarithmen

Definition von Potenzen I

Ist $a \in \mathbb{R}$ (eine reelle Zahl) und $n \in \mathbb{N}$ (eine natürliche Zahl), so definiert man die n-te *Potenz* von a wie folgt:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ferner definiert man:

$$a^0 = 1.$$

Durch diese Definition ist ebenfalls der Fall abgedeckt, dass $n \in \mathbb{Z}$ gilt – dass n also eine ganze Zahl ist.

Definition von Potenzen II

Wie zuvor sei a eine reelle Zahl und $r = \frac{p}{q}$ sei eine rationale Zahl. Ohne Beweis setzen wir voraus, dass die *q-te Wurzel* $\sqrt[q]{a}$ von a existiert. Dann definiert man:

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p.$$

Beispiel zu Potenzen I

Potenzen finden immer dann Anwendung, wenn ein *exponentielles Wachstum* beschrieben werden soll; bekannte Beispiele aus der Schule sind der Zinseszins oder Zerfallsprozesse.

Aufgabe:

Bei der Geburt ihres Kindes legen die Eltern einen Betrag von 2.500 Euro auf einem Konto an. Der jährliche Zinssatz beträgt 3,5%. Wie viel Geld befindet sich nach einem, nach zwei bzw. nach 18 Jahren auf dem Konto?

Beispiel zu Potenzen II

Lösung:

Es gilt, dass das Guthaben auf dem Konto jedes Jahr um 3,5% wächst. Der Betrag auf dem Konto wächst also jedes Jahr um den Faktor 1,035. Nach n Jahren hat sich der Betrag wie folgt verändert:

$$\text{Betrag} = 2.500 \text{ Euro } \cdot 1,035^n$$

Es folgt:

n	Betrag in Euro
0	$2500,00$
1	$2587,50$
2	$2678,06$
$\vdots$	$\vdots$
18	$4643,72$

Aufgaben

Aufgabe VI-1

Berechne die folgenden Potenzen. (Ohne Taschenrechner!)

a) 3^3	b) $(-7)^2$	c) $(-5)^3$
d) -2^4	e) $(-3 \cdot 2)^2$	f) $-(5 \cdot 3)^2$

Definition von Wurzeln

Es sei a eine positive reelle Zahl oder 0. Unter der *n-ten Wurzel* von a versteht man den (positiven) Wert $\sqrt[n]{a}$, für den die folgende Eigenschaft gilt:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Gibt es sowohl eine positive als auch eine negative Lösung, so ist die Wurzel stets die positive Lösung.

Häufig wird die *Quadratwurzel* verwendet. Anstelle von $\sqrt[2]{a}$ schreibt man typischerweise nur $\sqrt{a}$.

Beispiele:

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{4}, \quad \sqrt[3]{8}, \quad \sqrt[5]{\pi}$$

Aufgaben

Aufgabe VI-2

Vereinfache so weit wie möglich:

a) $7 \cdot \sqrt{x} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{8y} - \sqrt{16x} - 4 \cdot \sqrt{y}$

b) $\sqrt{\frac{11}{60}} \cdot \sqrt{\frac{12}{55}}$

c) $\sqrt{0,1} \cdot \sqrt{0,121}$

d) $(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b})$

Definition von Logarithmen I

Die Anwendung des *Logarithmus*, das *Logarithmieren*, ist eine weitere Umkehrung des Potenzierens.

Mithilfe des Logarithmus lässt sich bestimmen, mit welchem *Exponenten* c man eine gegebene *Basis* a potenzieren muss, um den Wert b zu erhalten:

$$\log_a b = c.$$

Die beiden nachfolgenden Aussagen sind äquivalent:

$$\begin{aligned} a^c &= b \\ \log_a b &= c. \end{aligned}$$

Definition von Logarithmen II

Beispiele für Logarithmen:

- $\log_2 8 = 3$
- $\log_3 243 = 5$
- $\ln e^{-2} = -2$

Typische Vertreter:

- *binärer Logarithmus*, *logarithmus dualis*: $\log_2$, lb, ld
- *natürlicher Logarithmus*, *logarithmus naturalis*: $\log_e$, ln
- *dekadischer Logarithmus*: $\log_{10}$

Definition von Logarithmen III

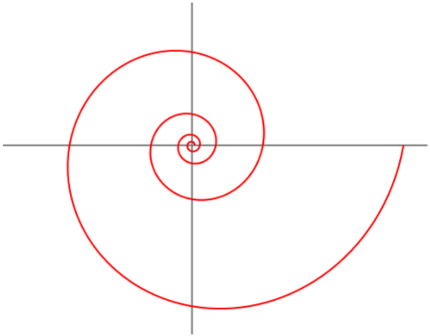
Frage:

Sind Potenzen und Logarithmen nur eine „mathematische Spielerei“ oder haben sie in der Natur eine praktische Relevanz?

Logarithmische Spiralen I

Antwort:

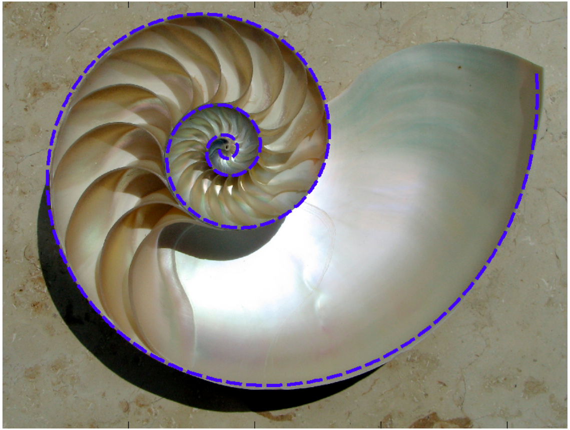
Nein! Es ist keine mathematische Spielerei. Sie kommen in der Natur häufig vor (z.B. als *logarithmische Spiralen*).



Logarithmische Spiralen II

Schnitt einer Nautilus-Schale
[Quelle: Wikipedia]

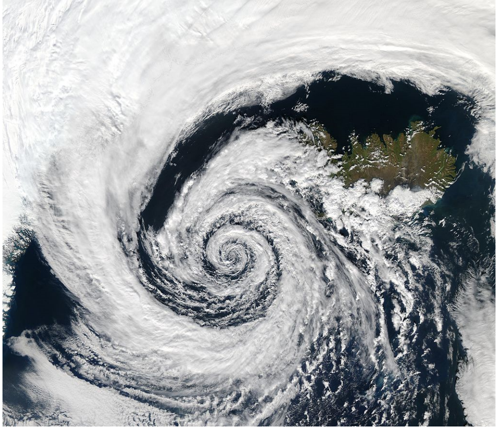
Logarithmische Spiralen III



Schnitt einer Nautilus-Schale

[Quelle: Wikipedia]

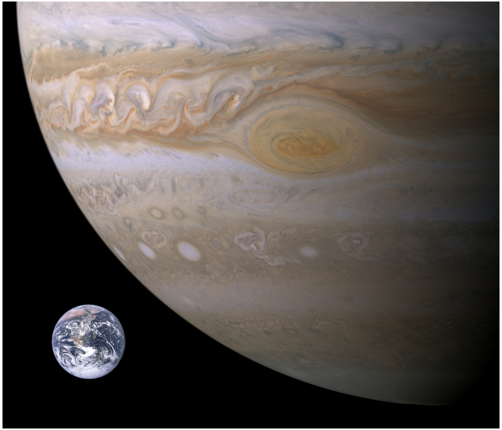
Logarithmische Spiralen IV



Tiefdruckwirbel über Island

[Quelle: Wikipedia]

Logarithmische Spiralen V



„Rotes Auge“ des Jupiters

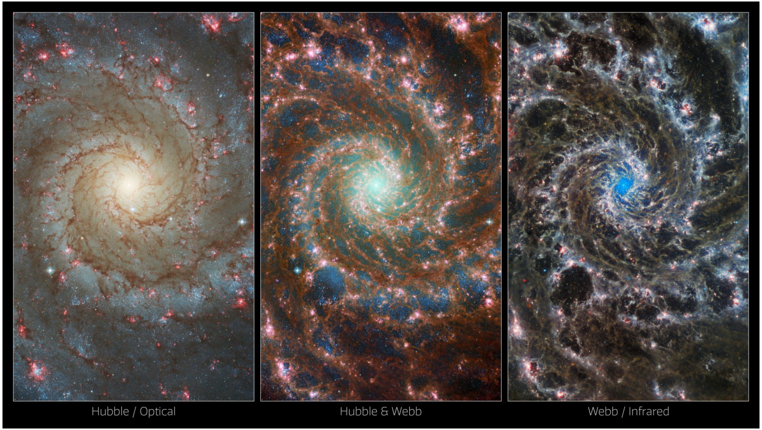
[Quelle: Wikipedia]

Logarithmische Spiralen VI

Whirlpool-Galaxie (NGC 5194/5195)

[Quelle: Wikipedia]

Logarithmische Spiralen VII



Phantom-Galaxie (M74)

[Quelle: NASA]

Logarithmische Spiralen VIII

Phantom-Galaxie (M74)
[Quelle: NASA]

Beispiel zu Logarithmen I

Aufgabe:

Ernst gewinnt in einem Preisausschreiben 5.000 Euro. Er entscheidet sich, das Geld anzulegen und bekommt jährlich 4% Zinsen. Nach wie vielen Jahren hat sich sein Geld verdoppelt?

Beispiel zu Logarithmen II

Lösung:

Es gilt, die folgende Gleichung zu lösen:

$$5.000 \cdot 1,04^n = 10.000.$$

Hieraus ergibt sich direkt:

$$\begin{aligned} 1,04^n &= 2 \\ n &= \log_{1,04} 2. \end{aligned}$$

Umrechnen von Logarithmen

Hier stößt man sofort auf das nächste Problem: Wie berechnet man den Logarithmus zur Basis 1,04?

Die Lösung ist einfach, denn jeder Logarithmus lässt sich durch einen (anderen) Logarithmus mit einer beliebigen Basis darstellen. Es gilt die folgende allgemeine Formel:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}.$$

Beispiel zu Logarithmen III

Für unser Beispiel bedeutet dies:

$$\begin{aligned}\log_{1,04} 2 &= \frac{\ln 2}{\ln 1,04} \\ &= 17,672987...\end{aligned}$$

Das Vermögen von Ernst wird sich also in etwa 17,67 Jahren verdoppeln.

Beispiel zu Logarithmen IV

Ein alternativer Lösungsweg ist der folgende:

$$\begin{aligned} 5000 \cdot 1,04^n &= 10000 \\ 1,04^n &= 2 \\ \ln 1,04^n &= \ln 2 \\ n \cdot \ln 1,04 &= \ln 2 \\ n &= \frac{\ln 2}{\ln 1,04} \\ &= 17,672987... \end{aligned}$$

Beispiel zu Logarithmen V

Dasselbe für einen Zinssatz von 0,15%:

$$
\begin{aligned}
5000 \cdot 1,0015^n &= 10000 \\
1,0015^n &= 2 \\
\ln 1,0015^n &= \ln 2 \\
n \cdot \ln 1,0015 &= \ln 2 \\
n &= \frac{\ln 2}{\ln 1,0015} \\
&= 462,444607...
\end{aligned}
$$

Aufgaben

Aufgabe VI-3

Bestimme die Werte r (ohne Taschenrechner):

a) $r = \log_8 64$ b) $\log_r 125 = 3$

c) $\log_{10} r = 3$ d) $\log_2 r = -4$

Aufgabe VI-4

Bestimme die Werte r (ohne Taschenrechner):

a) $r = \log_7 343$ b) $\ln e^{-1} = r$

c) $r = \log_2 32 - \log_2 16 + \log_2 8$ d) $r = \log_2 \sqrt{8}$

Aufgaben

Aufgabe VI-5

Die Halbwertszeit von Radium 88 beträgt 1600 Jahre. Wie lange dauert es, bis 10g zu 1,25g zerfallen sind? Erstelle zunächst eine entsprechende Funktionsgleichung.

Aufgaben

Aufgabe VI-6

In einem Teich wächst eine Seerose. Sie wächst sehr schnell und verdoppelt jeden Tag den Platz, den sie an der Oberfläche einnimmt. Nach 30 Tagen ist der See zugewachsen. Wie lange dauert es, bis der See zu einem Viertel zugewachsen ist?