Vorkurs: Mathematik für Informatiker

Teil 2

Wintersemester 2023/24

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Inhaltsverzeichnis

Kapitel VII: Rechengesetze

Rechenregeln für Brüche

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{c \cdot b} \quad (c \neq 0)$$

Rechenregeln für Potenzen I

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Rechenregeln für Potenzen II

Potenzgesetz	Anwendbarkeit
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	• für beliebige natürliche Exponenten $m, n \in \mathbb{N}$ • für beliebige ganzzahlige Exponenten $m, n \in \mathbb{Z}$, falls $a \neq 0$ gilt • für beliebige reelle Exponenten $m, n \in \mathbb{R}$, falls $a > 0$ gilt • für beliebige rationale Exponenten $m, n \in \mathbb{Q}$ mit ungeraden Nennern, falls $a < 0$ gilt
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	• für beliebige natürliche Exponenten $m, n \in \mathbb{N}$ • für beliebige ganzzahlige Exponenten $m, n \in \mathbb{Z}$, falls $a \neq 0$ gilt • für beliebige reelle Exponenten $m, n \in \mathbb{R}$, falls $a > 0$ gilt • für beliebige rationale Exponenten $m, n \in \mathbb{Q}$ mit ungeraden Nennern, falls $a < 0$ gilt
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	• für beliebige natürliche Exponenten $n \in \mathbb{N}$ • für beliebige ganzzahlige Exponenten $n \in \mathbb{Z}$, falls $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt • für beliebige reelle Exponenten $n \in \mathbb{R}$, falls $a > 0$ und $b > 0$ gilt • für beliebige rationale Exponenten $n \in \mathbb{Q}$ mit ungeraden Nennern, falls mindestens eine der Aussagen $a < 0$ oder $b < 0$ gilt
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	• für beliebige ganzzahlige Exponenten $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 0$ und $b \neq 0$ • für beliebige ganzzahlige Exponenten $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq 0$ und $a \neq 0$ • für beliebige reelle Exponenten $n \in \mathbb{R}$, falls $a > 0$ und $b > 0$ gilt • für beliebige rationale Exponenten $n \in \mathbb{Q}$ mit ungeradem Nenner, falls mindestens eine der Aussagen $a < 0$ oder $b < 0$ gilt
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	• für beliebige natürliche Exponenten $m, n \in \mathbb{N}$ • für beliebige ganzzahlige Exponenten n, m, falls $a \neq 0$ gilt • für beliebige reelle Exponenten n, m, falls $a > 0$ gilt • für beliebige rationale Exponenten $m, n \in \mathbb{Q}$ mit ungeraden Nennern, falls $a < 0$ gilt

Rechenregeln für Potenzen III

Missachtung der Anwendbarkeit der jeweiligen Potenzgesetze kann zu „interessanten“ (und falschen!) Ergebnissen führen:

$$
\begin{aligned}
2+2 = 4 - \frac{9}{2} + \frac{9}{2} &= \sqrt{\left(4-\frac{9}{2}\right)^2} + \frac{9}{2} \\
&= \sqrt{4^2 - 2\cdot 4\cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2} + \frac{9}{2} \\
&= \sqrt{16 - 36 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} + \frac{9}{2} \\
&= \sqrt{25 - 45 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} + \frac{9}{2} \\
&= \sqrt{5^2 - 2\cdot 5\cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2} + \frac{9}{2} \\
&= \sqrt{\left(5-\frac{9}{2}\right)^2} + \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 5
\end{aligned}
$$

Rechenregeln für Wurzeln I

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^m = \sqrt{a^m}$$

$$a^{\frac{m}{2}} = \sqrt{a^m}$$

$$a^{-\frac{m}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a^m}}$$

Rechenregeln für Wurzeln II

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Rechenregeln für Wurzeln III

Wurzelgesetz	**Anwendbarkeit**
$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$	• für nichtnegative reelle Zahlen $a\geq 0$, $b\geq 0$ und natürliche Zahlen n • für beliebige reelle Zahlen a, b und ungerade natürliche Zahlen n
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	• für nichtnegative reelle Zahlen $a\geq 0$, $b>0$ und natürliche Zahlen n • für beliebige reelle Zahlen a, b mit $b\neq 0$ und ungerade natürliche Zahlen n
$\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{a}=\sqrt[m\cdot n]{a^{n+m}}$	• für nichtnegative reelle Zahlen $a\geq 0$ und natürliche Zahlen m,n • für beliebige reelle Zahlen a und ungerade natürliche Zahlen m,n
$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a^{n-m}}$	• für positive reelle Zahlen $a>0$ und natürliche Zahlen m,n • für beliebige reelle Zahlen a mit $a\neq 0$ und ungerade natürliche Zahlen m,n
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$	• für nichtnegative reelle Zahlen $a\geq 0$ und natürliche Zahlen m,n • für beliebige reelle Zahlen a und ungerade natürliche Zahlen m,n
$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n=\sqrt[m]{a^n}$	• für nichtnegative reelle Zahlen $a\geq 0$ und natürliche Zahlen n • für beliebige reelle Zahlen a und ungerade natürliche Zahlen n
$\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[m\cdot p]{a^{n\cdot p}}$	• für reelle Zahlen $a\geq 0$, n und natürliche Zahlen m,p
$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$	• für reelle Zahlen $a\geq 0$, n und natürliche Zahlen m

Rechenregeln für Logarithmen I

$$\log_a (n \cdot m) = \log_a n + \log_a m$$

$$\log_a \left(\frac{n}{m}\right) = \log_a n - \log_a m$$

$$\log_a (n^m) = m \cdot \log_a n$$

$$\log_a \left(\sqrt[m]{n}\right) = \frac{1}{m} \cdot \log_a n$$

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

$$\log_a n = \log_a b \cdot \log_b n$$

Rechenregeln für Logarithmen II

Logarithmusgesetz	**Anwendbarkeit**
$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$	• für positive reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y > 0$ und positive reelle Basen $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ und $b \neq 1$.
$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$	• für positive reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y > 0$ und positive reelle Basen $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ und $b \neq 1$.
$\log_b(x^y) = y \cdot \log_b x$	• für reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und positive reelle Basen $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ und $b \neq 1$.
$\log_b(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \cdot \log_b x$	• für reelle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$, natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ und positive reelle Basen $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ und $b \neq 1$.

Aufgaben

Aufgabe VII-1

Vereinfache die folgenden Terme:

a) $a^7 \cdot a^4$

b) $5x \cdot 4x^6$

c) $(-3z^4) \cdot (-3z^5)$

d) $20x^5 \cdot (-x^3) \cdot x^{-2}$

Aufgabe VII-2

Vereinfache die folgenden Terme:

a) $a^{-3x} a^{2x}$

b) $\dfrac{x^{2-b}}{x^b}$

c) $3x^0 y^{-2}$

d) $\dfrac{a^{2-x} b^{6+y}}{a^{6-x} b}$

Aufgaben

Aufgabe VII-3

Vereinfache die folgenden Terme:

a) $\sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[6]{x^{18}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^9}}$ c) $\sqrt[7]{a^{10}} : \sqrt[4]{a^5}$

Aufgabe VII-4

Vereinfache die folgenden Terme:

a) $\log\left(\frac{a}{2b}\right)$

b) $\log\left(\frac{a^2c+ac}{ab}-\frac{c}{b}\right)$

c) $\log\left(\sqrt[3]{a^2}\right) - \log a + 2\log\left(\frac{1}{7}a\right)$

d) $\log\left(\frac{a^2b^{-1}c}{ac^{-3}b}\right)$

e) $\log\left(a^3\right) + \log\left(\sqrt{b}\right) - \log\left(ab^2\right)$

Aufgaben

Aufgabe VII-5

Vereinfache den folgenden Term:

$$\log\left(\frac{\sqrt{a^2 \cdot b^{-1} \cdot d \cdot a^5 \cdot \left(c \cdot b^4\right)^2 \cdot \left(c^2\right)^3 \cdot b^{-2}}}{\sqrt[5]{\left(a \cdot b\right)^2 \cdot c^{-2} \cdot d^5 \cdot \left(b \cdot a^4\right)^{-3}}}\right)$$

Kapitel VIII: Intervalle

Intervalle der reellen Zahlen I

$$\big[a, b\big] := \Big\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\Big\}$$
$$\big(a, b\big) := \Big\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\Big\}$$
$$\big(a, b\big] := \Big\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\Big\}$$
$$\big[a, b\big) := \Big\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\Big\}$$

$\big[a, b\big]$ heißt *abgeschlossenes* (oder *kompaktes*) *Intervall*;
$\big(a, b\big)$ heißt *offenes Intervall*;
$\big(a, b\big]$ und $\big[a, b\big)$ sind *halboffene Intervalle*.

Länge eines Intervalls:

$$\Big|\big[a, b\big]\Big| = \Big|\big(a, b\big)\Big| = \Big|\big(a, b\big]\Big| = \Big|\big[a, b\big)\Big| = b - a$$

Intervalle der reellen Zahlen II

Uneigentliche Intervalle:

$$\begin{aligned}
\big[a, \infty\big) &:= \Big\{x \in \mathbb{R} : a \leq x\Big\} \\
\big(a, \infty\big) &:= \Big\{x \in \mathbb{R} : a < x\Big\} \\
\big(-\infty, b\big] &:= \Big\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\Big\} \\
\big(-\infty, b\big) &:= \Big\{x \in \mathbb{R} : x < b\Big\}
\end{aligned}$$

Kapitel IX: Verknüpfungen und deren Eigenschaften

Verknüpfungen

Eine *innere zweistellige Verknüpfung* auf der Menge A ist eine zweistellige Abbildung $\star : A \times A \to A$, die jedem Element des kartesischen Produkts $A \times A$ ein Element der Menge A zuordnet. Die Menge A ist bezüglich der Verknüpfung $\star$ *abgeschlossen*.

Die Bezeichnung innere zweistellige Verknüpfung rührt daher, dass die Verknüpfung $\star$ vollständig innerhalb der Menge A stattfindet: Es werden zwei Elemente der Menge A zu einem Element derselben Menge A verknüpft.

Assoziativgesetz I

Aus dem Lateinischen: associare - vereinigen, verbinden, verknüpfen, vernetzen.

Eine *zweistellige* (oder *binäre*) *Verknüpfung* ist *assoziativ*, wenn die Reihenfolge, in der die Verknüpfungen ausgeführt werden, keine Rolle spielt. Anders gesagt: Die Klammerung mehrerer (gleichartiger) assoziativer Verknüpfungen ist beliebig.

Assoziativgesetz II

In einem Summen- oder Produktterm dürfen die Summanden bzw. Faktoren beliebig geklammert werden. Dies gilt auch für mehr als drei Summanden bzw. Faktoren.

Eine binäre Verknüpfung $\star$ auf einer Menge A heißt *assoziativ*, wenn für alle $a, b, c \in A$ das *Assoziativgesetz* gilt:

$$a \star (b \star c) = (a \star b) \star c.$$

Assoziativgesetz III

Die Verknüpfung von fünf Elementen a, b, c, d und e kann beispielsweise bereits auf 14 Arten geklammert werden:

$$\begin{array}{lll}
a \star \Big(b \star (c \star (d \star e))\Big) & (a \star b) \star (c \star (d \star e)) & \Big((a \star (b \star c)) \star d\Big) \star e \\
a \star \Big(b \star ((c \star d) \star e)\Big) & (a \star b) \star ((c \star d) \star e) & \Big((a \star b) \star (c \star d)\Big) \star e \\
a \star \Big((b \star (c \star d)) \star e\Big) & ((a \star b) \star c) \star (d \star e) & \Big(a \star ((b \star c) \star d)\Big) \star e \\
a \star \Big((b \star c) \star (d \star e)\Big) & (a \star (b \star c)) \star (d \star e) & \Big(a \star (b \star (c \star d))\Big) \star e \\
a \star \Big(((b \star c) \star d) \star e\Big) & \Big(((a \star b) \star c) \star d\Big) \star e &
\end{array}$$

Assoziativgesetz IV

Aufgrund des Assoziativgesetzes ist es möglich, eine *klammerfreie Notation* einzuführen:

$$a \star (b \star c) = a \star b \star c.$$

Assoziativgesetz V

Aufgabe IX-1

Welche der folgenden Operationen sind assoziativ? Begründe deine Antworten.

- Addition
- Subtraktion
- Multiplikation
- Division
- Potenzieren

Kommutativgesetz I

Aus dem Lateinischen: commutare - vertauschen.

Wenn das *Kommutativgesetz* gilt, können die Argumente einer Operation vertauscht werden, ohne dass sich das Ergebnis verändert.

Eine binäre Verknüpfung $\star$ auf einer Menge A heißt *kommutativ* (oder *abelsch*), wenn für alle $a, b \in A$ das *Kommutativgesetz* gilt:

$$a \star b = b \star a.$$

Kommutativgesetz II

Aufgabe IX-2

Welche der folgenden Operationen sind kommutativ? Begründe deine Antworten.

- Addition
- Subtraktion
- Multiplikation
- Division
- Potenzieren

Distributivgesetz I

Aus dem Lateinischen: distribuere - verteilen.

Distributivgesetze sind mathematische Regeln, die angeben, wie sich zwei binäre Verknüpfungen bei der Auflösung von Klammern verhalten.

Typische Anwendungen der Distributivgesetze sind das *Ausmultiplizieren* sowie das *Ausklammern*.

Distributivgesetz II

Als Beispiel kann die Verknüpfung der binären Operationen $\star$ und $\circ$ dienen. Man unterscheidet zwischen *links*- und *rechtsdistributiven* Verknüpfungen:

$$\begin{aligned} a \star \left(b \circ c\right) &= \left(a \star b\right) \circ \left(a \star c\right) && \text{(linksdistributiv)} \\ \left(b \circ c\right) \star a &= \left(b \star a\right) \circ \left(c \star a\right) && \text{(rechtsdistributiv)} \end{aligned}$$

Distributivgesetz III

Frage:

Warum unterscheidet man zwischen Links- und Rechtsdistributivität?

Distributivgesetz IV

Antwort:

Da nicht alle Operationen kommutativ sind, dürfen die Operanden nicht immer vertauscht werden, weswegen man beide Varianten des Distributivgesetzes eingeführt hat.

Aufgaben

Aufgabe IX-3

Es sei als bekannt vorausgesetzt, dass sowohl die Addition als auch die Multiplikation von ganzen Zahlen assoziativ und kommutativ ist. Zeige, dass dann auch die Addition von rationalen Zahlen assoziativ ist.

Kapitel X: Binomische Formeln

Binomische Formeln I

Das Adjektiv *binomisch* leitet sich von bi (zwei) und Nomen (Namen) ab. Im Gegensatz zu einigen wenigen Adjektiven wie abelsch leitet es sich nicht von einem Mathematiker-Namen ab.

Binomische Formeln II

1. binomische Formel:

$$\left(a+b\right)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. binomische Formel:

$$\left(a-b\right)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. binomische Formel:

$$\left(a+b\right)\left(a-b\right) = a^2 - b^2$$

Binomische Formeln III

Frage:

Wie kann man den Term $(a+b)^3$ berechnen?

Binomischer Lehrsatz

Als Verallgemeinerung der ersten beiden binomischen Formeln ergibt sich der sogenannte *binomische Lehrsatz*:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} a^n b^0.
\end{aligned}
$$

Binomialkoeffizienten

Die Elemente $\binom{n}{k}$ werden *Binomialkoeffizienten* genannt. Es gilt:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad \text{bzw.} \qquad \binom{n}{k} := \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Der Wert $\binom{n}{k}$ beschreibt die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer n-elementigen Menge k Elemente auszuwählen, wobei die Auswahlreihenfolge der Elemente keine Rolle spielt und kein Element mehrfach verwendet werden kann („Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge“).

Pascalsches Dreieck I

Der Wert $\binom{n}{k}$ bildet den Eintrag in der n-ten Zeile und k-ten Spalte des *Pascalschen Dreiecks*.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Pascalsches Dreieck II

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 \\
 & & & & & & & & \vdots & & & & & & & &
\end{array}
$$

Kapitel XI: Funktionen und deren Eigenschaften

Definition I

Eine *Funktion* (oder *Abbildung*) $f : A \to B$ stellt eine *Abbildungsvorschrift* dar, die jedem Element der Menge A ein Element der Menge B zuordnet.

Eine Funktion kann formal wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\mapsto f(a). \end{aligned}$$

Definition II

<u>Bezeichnungen:</u>

- A: *Definitionsbereich*, *Urbildmenge*
- B: *Bildmenge*, *Bildbereich*
- $A \to B$: *Signatur*
- $a \mapsto f(a)$: *Funktionsvorschrift*, *Abbildungsvorschrift*
- *Wertebereich*: $W_f := f(A) = \Big\{f(a) : a \in A\Big\}$.
  Nicht alle Elemente der Bildmenge müssen ein Urbild haben. Es gilt $f(A) \subseteq B$.

Definition III

Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

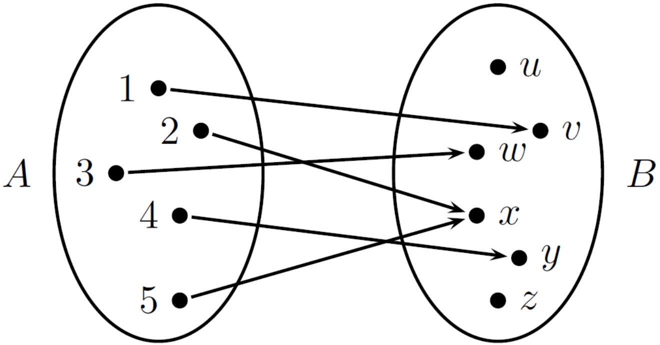
Definitions- und Wertebereich der Funktion f:

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R};$$
$$W_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\right\}.$$

Für dieses Beispiel gilt also $W_f \subset \mathbb{R}$.

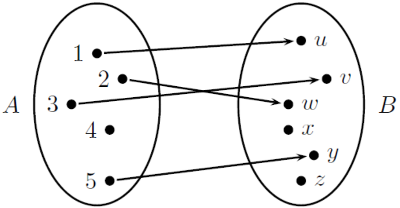
Definition IV

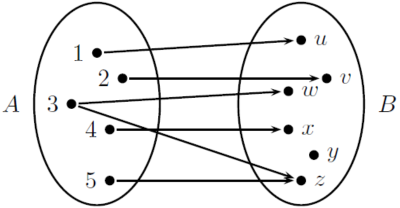
Grafisch lässt sich eine Abbildung wie folgt veranschaulichen:



Definition V

Bei den nachfolgenden Beispielen handelt es sich *nicht* um Abbildungen:





Verkettung von Funktionen

Es sei $h : A \to C$ eine *Komposition* (oder *Verkettung*) der Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$.

$$h = g \circ f$$
$$h(x) = g\Big(f(x)\Big)$$

Statt Komposition kann man auch *Nacheinanderausführung* sagen. $g \circ f$ bedeutet also „g wird nach f ausgeführt“.

Nullstelle

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 eine *Nullstelle*, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$f(x_0) = 0.$$

Funktionen können keine, endlich oder unendlich viele Nullstellen besitzen.

Lokales Maximum

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 ein *lokales Maximum*, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- Es gilt $f'(x_0) = 0$ sowie $f''(x_0) < 0$.
- Es gilt $f'(x_0) = 0$ und die Funktion f' besitzt an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von $+$ zu $-$.

Lokales Minimum

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 ein *lokales Minimum*, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- Es gilt $f'(x_0) = 0$ sowie $f''(x_0) > 0$.
- Es gilt $f'(x_0) = 0$ und die Funktion f' besitzt an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$.

Wendepunkte

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 einen *Wendepunkt*, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:

- Es gilt $f''(x_0) = 0$ sowie $f'''(x_0) \neq 0$.
  - Gilt zudem $f'(x_0) = 0$, so handelt es sich um einen *Sattelpunkt*.
  - Gilt $f'''(x_0) < 0$, so liegt ein Übergang von konvexer zu konkaver Krümmung vor.
  - Gilt $f'''(x_0) > 0$, so liegt ein Übergang von konkaver zu konvexer Krümmung vor.

Monotonie

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Funktion f ist an der Stelle x_0

- *monoton steigend*, falls $f'(x_0) \geq 0$ gilt;
- *streng monoton steigend*, falls $f'(x_0) > 0$ gilt;
- *monoton fallend*, falls $f'(x_0) \leq 0$ gilt;
- *streng monoton fallend*, falls $f'(x_0) < 0$ gilt.

Krümmung

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Funktion f ist an der Stelle x_0

- *linksgekrümmt/konvex*, falls $f''(x_0) \geq 0$ gilt;
- *streng linksgekrümmt/konvex*, falls $f''(x_0) > 0$ gilt;
- *rechtsgekrümmt/konkav*, falls $f''(x_0) \leq 0$ gilt;
- *streng rechtsgekrümmt/konkav*, falls $f''(x_0) < 0$ gilt.

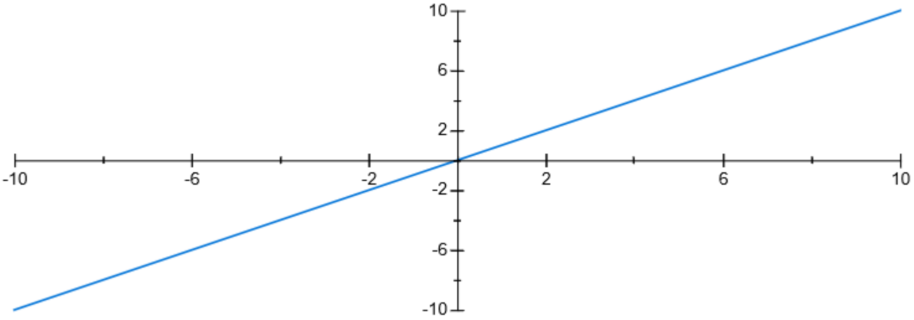
Kapitel XII: Potenz-, Wurzel-, Exponential- & Logarithmusfunktionen

Potenzfunktionen I

Potenzfunktionen sind spezielle Funktionen der folgenden Form:

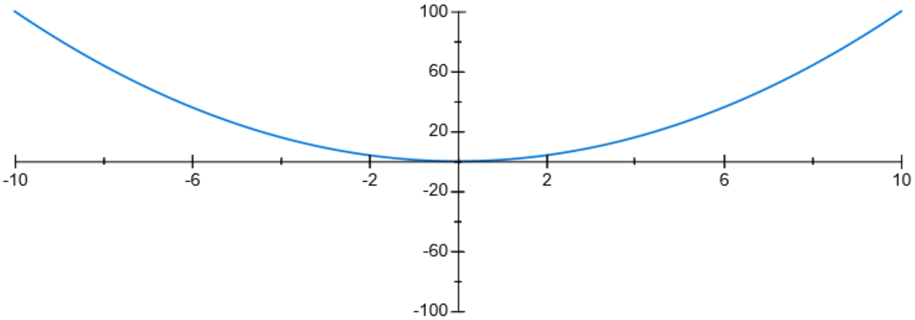
$$f(x) = a \cdot x^r \qquad (a \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{N}).$$

Potenzfunktionen II



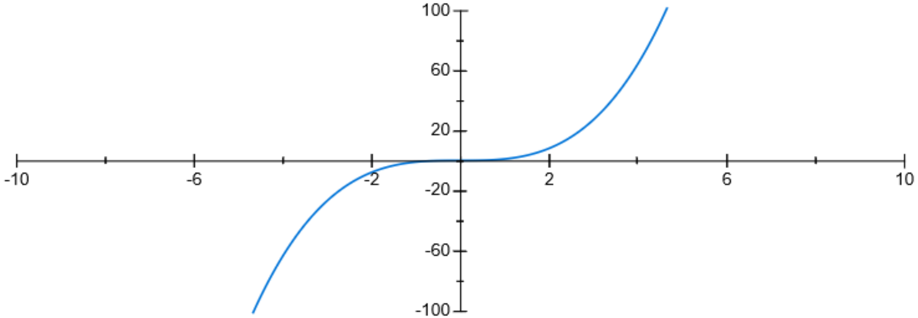
Graph der Potenzfunktion x

Potenzfunktionen III



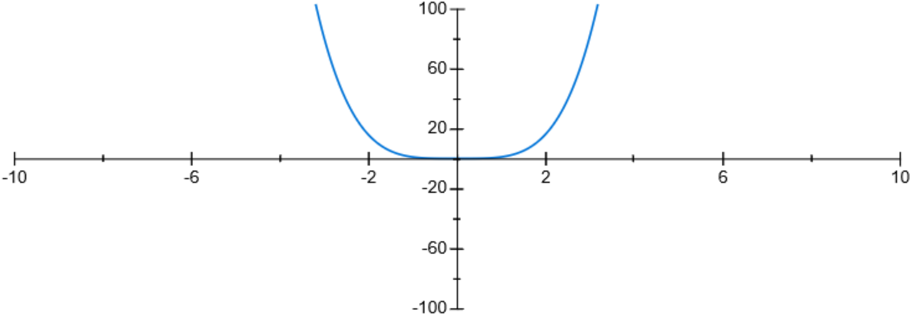
Graph der Potenzfunktion x^2

Potenzfunktionen IV



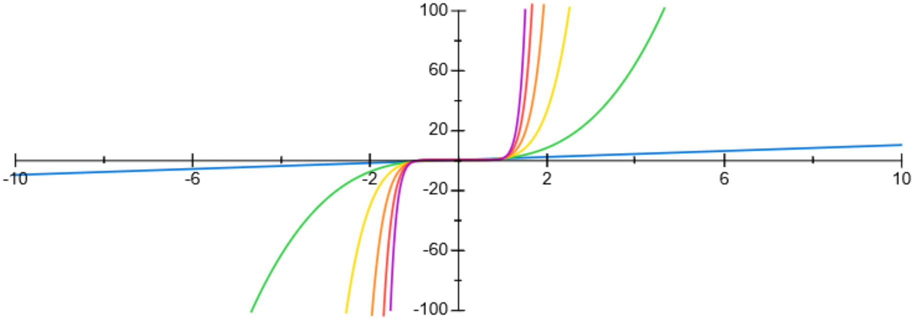
Graph der Potenzfunktion x^3

Potenzfunktionen V



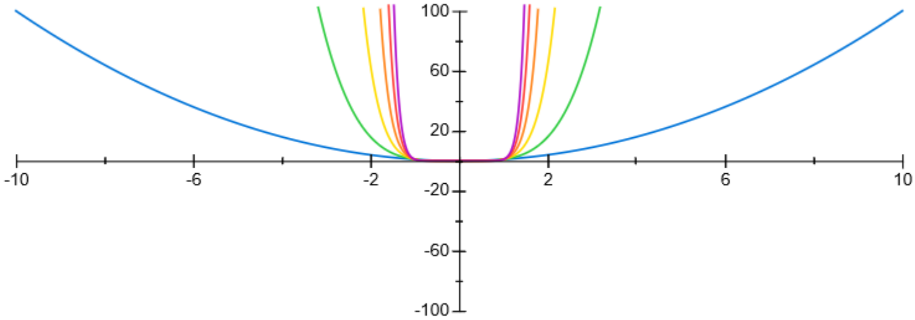
Graph der Potenzfunktion x^4

Potenzfunktionen VI



Graphen der ungeraden Potenzfunktionen x bis x^{11}

Potenzfunktionen VII

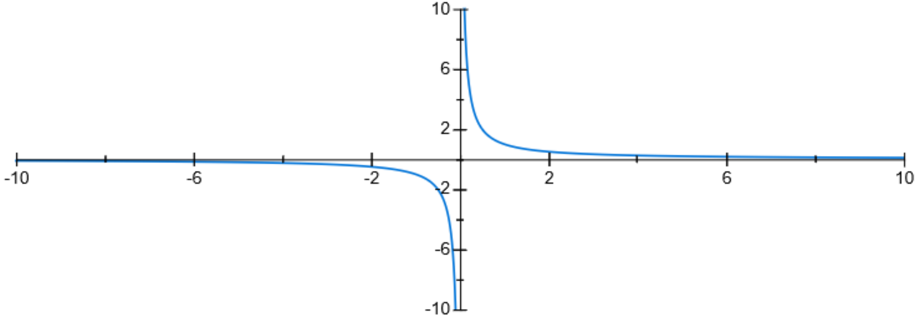


Graphen der geraden Potenzfunktionen x^2 bis x^{12}

Potenzfunktionen VIII

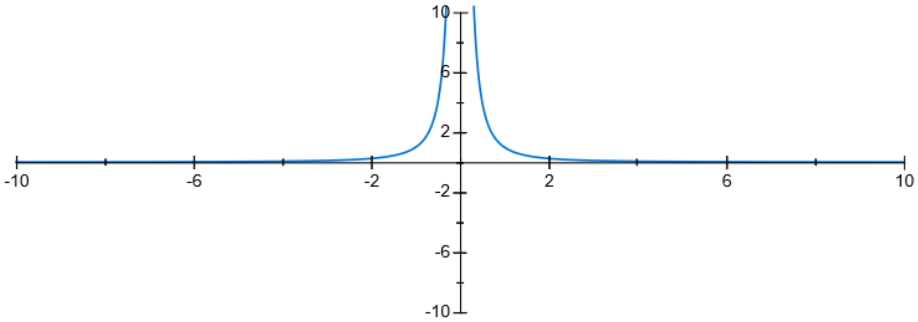
	gerade Potenzen	ungerade Potenzen
Definitionsbereich	• $-\infty < x < \infty$	• $-\infty < x < \infty$
Wertebereich	• $0 \leq x^n < \infty$	• $-\infty < x^n < \infty$
Periodizität	• keine	• keine
Monotonie	• streng monoton fallend für $x < 0$ • streng monoton steigend für $x > 0$	• streng monoton steigend
Krümmung	• streng konvex	• streng konkav für $x < 0$ • streng konvex für $x > 0$
Symmetrien	• achsensymmetrisch zur y-Achse	• punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung
Asymptoten	• keine	• keine
Nullstellen	• $x_0 = 0$	• $x_0 = 0$
Sprungstellen	• keine	• keine
Polstellen	• keine	• keine
Extrema	• Minimum bei $x = 0$	• keine
Wendepunkte	• keine	• Wendepunkt bei $x = 0$

Potenzen mit negativen Exponenten I



Graph der Funktion x^{-1}

Potenzen mit negativen Exponenten II



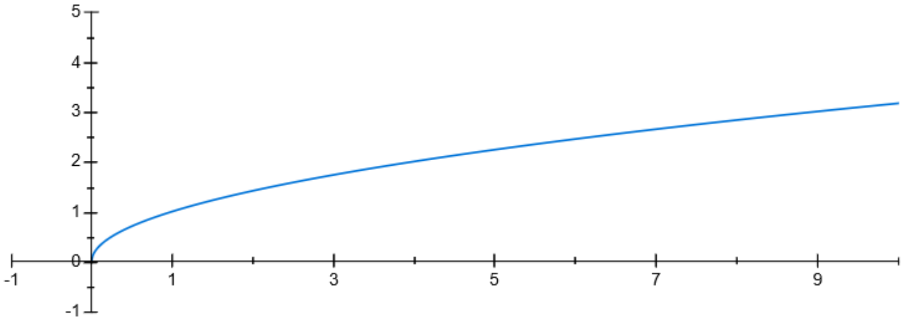
Graph der Funktion x^{-2}

Wurzelfunktionen I

Wurzelfunktionen sind Funktionen vom Typ $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (für gerade Wurzeln) bzw. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (für ungerade Wurzeln) und besitzen die folgende Form:

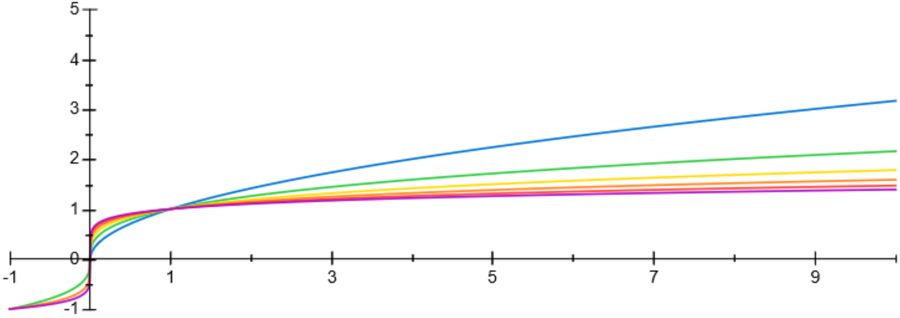
$$f(x) = c \cdot \sqrt[a]{x} \qquad (a \in \mathbb{N},\ a \neq 1,\ c \in \mathbb{R}).$$

Wurzelfunktionen II



Graph der Wurzelfunktion $\sqrt{x}$

Wurzelfunktionen III

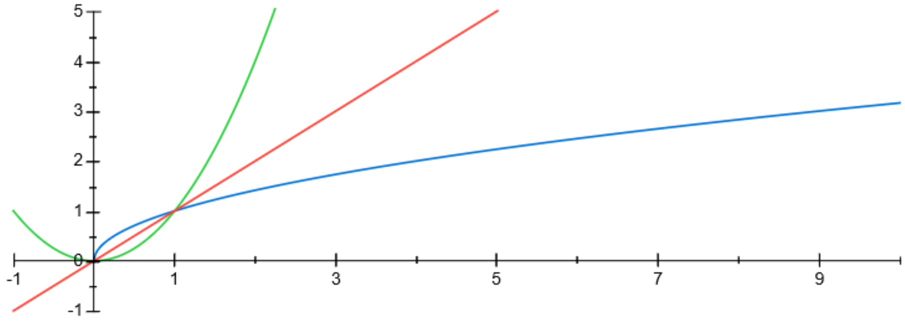


Graphen der Wurzelfunktion $\sqrt{x}$ bis $\sqrt[7]{x}$

Wurzelfunktionen IV

	gerade Wurzeln	ungerade Wurzeln
Definitionsbereich	• $0 \leq x < \infty$	• $-\infty < x < \infty$
Wertebereich	• $0 \leq \sqrt[n]{x} < \infty$	• $-\infty < \sqrt[n]{x} < \infty$
Periodizität	• keine	• keine
Monotonie	• streng monoton steigend	• streng monoton steigend
Krümmung	• streng konkav	• streng konvex für $x < 0$ • streng konkav für $x > 0$
Symmetrien	• keine	• punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung
Asymptoten	• keine	• keine
Nullstellen	• $x_0 = 0$	• $x_0 = 0$
Sprungstellen	• keine	• keine
Polstellen	• keine	• keine
Extrema	• keine	• keine
Wendepunkte	• keine	• Wendepunkt bei $x = 0$

Wurzelfunktionen V



Wurzelfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen – hier am Beispiel von $\sqrt{x}$ (blau) und x^2 (grün)

Exponentialfunktionen I

Exponentialfunktionen sind Funktionen vom Typ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und besitzen die folgende Form:

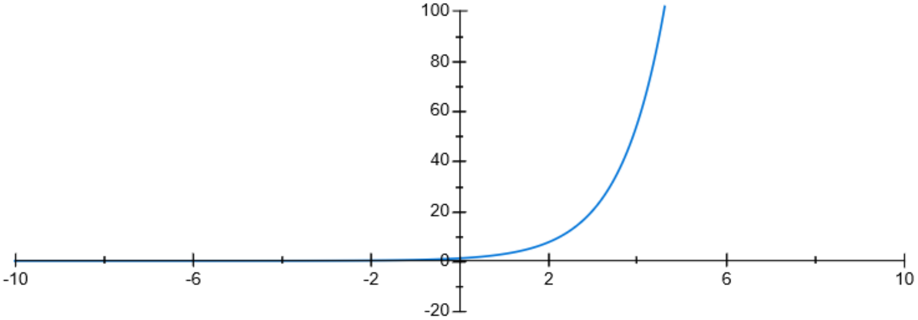
$$f(x) = c \cdot a^x \qquad (a \in \mathbb{R}^+,\ c \in \mathbb{R}).$$

Im Gegensatz zu Potenzfunktionen steht die Variable x bei Exponentialfunktionen nicht in der *Basis*, sondern im *Exponenten*.

Für alle Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ gilt:

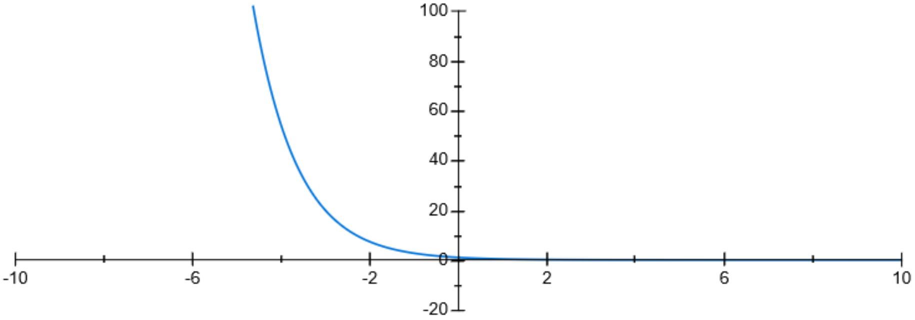
$$f(0) = 1.$$

Exponentialfunktionen II



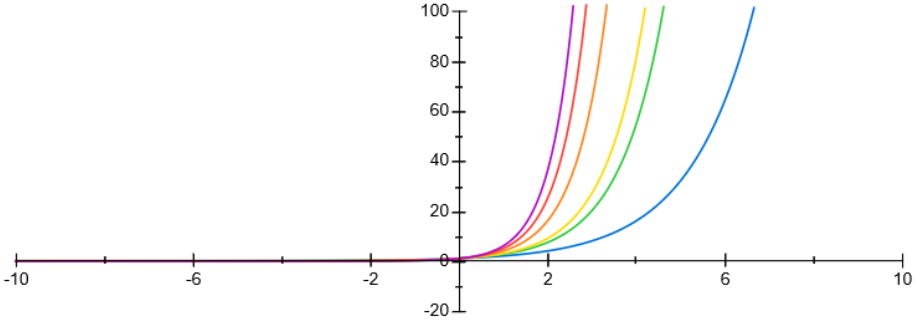
Graph der Exponentialfunktion e^x

Exponentialfunktionen III



Graph der Exponentialfunktion $\left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$

Exponentialfunktionen IV



Graphen der Exponentialfunktionen 2^x bis 6^x sowie e^x

Exponentialfunktionen V

	Basis $a > 1$	Basis $0 < a < 1$
Definitionsbereich	• $-\infty < x < \infty$	• $-\infty < x < \infty$
Wertebereich	• $0 < a^x < \infty$	• $0 < a^x < \infty$
Periodizität	• keine	• keine
Monotonie	• streng monoton steigend	• streng monoton fallend
Krümmung	• streng konvex	• streng konvex
Symmetrien	• keine	• keine
Asymptoten	• x-Achse als waagerechte Asymptote für $x \to -\infty$	• x-Achse als waagerechte Asymptote für $x \to \infty$
Nullstellen	• keine	• keine
Sprungstellen	• keine	• keine
Polstellen	• keine	• keine
Extrema	• keine	• keine
Wendepunkte	• keine	• keine

Exponentialfunktionen VI

Aufgrund der Regeln für das Rechnen mit Potenzen besitzen Exponentialfunktionen ein enormes Wachstum.

$$a^{(m+n)} = a^m \cdot a^n$$

Eine Exponentialfunktion a^x (mit $a > 1$) *wächst viel schneller* als jede Potenzfunktion x^n.

Logarithmusfunktionen I

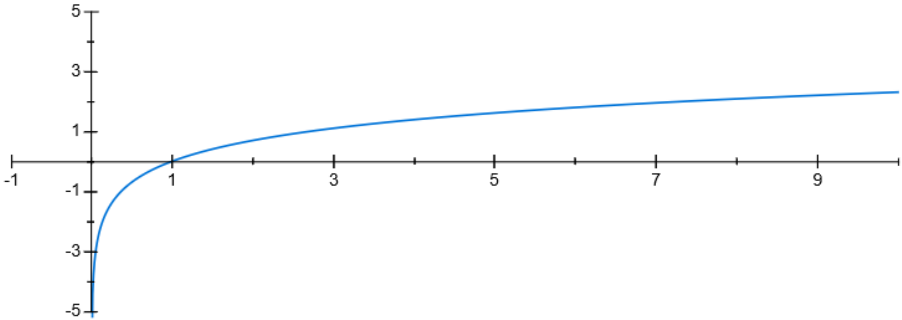
Logarithmusfunktionen sind Funktionen vom Typ $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und besitzen die folgende Form:

$$f(x) = c \cdot \log_a x \qquad (a \in \mathbb{R}^+,\ a \neq 1,\ c \in \mathbb{R}).$$

Für alle Logarithmusfunktionen f gilt:

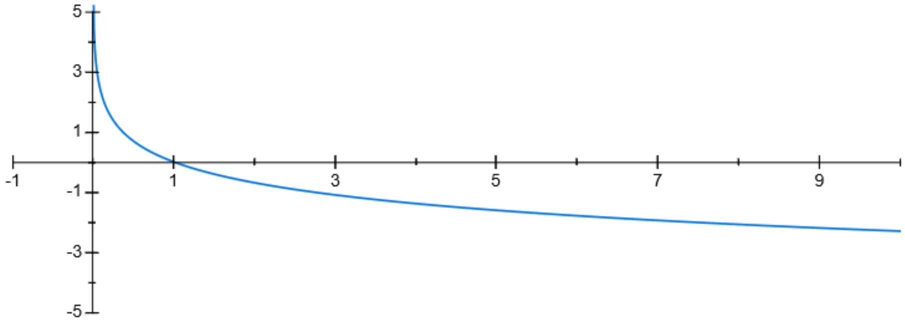
$$f(1) = 0.$$

Logarithmusfunktionen II



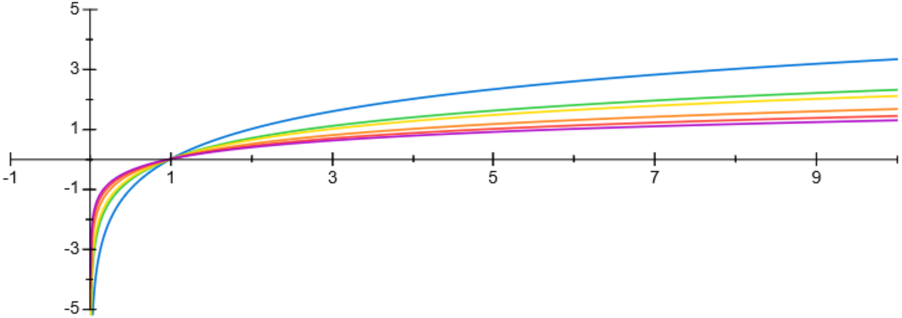
Graph der Logarithmusfunktion $\ln x$

Logarithmusfunktionen III



Graph der Logarithmusfunktion $\log_{\frac{1}{e}} x = -\ln x$

Logarithmusfunktionen IV

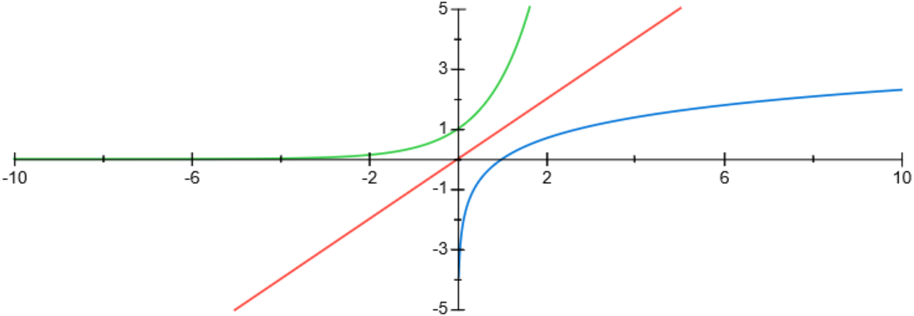


Graphen der Logarithmusfunktionen $\log_2 x$ bis $\log_6 x$ sowie $\ln x$

Logarithmusfunktionen V

	Basis $a > 1$	Basis $0 < a < 1$
Definitionsbereich	• $0 < x < \infty$	• $0 < x < \infty$
Wertebereich	• $-\infty < \log_a x < \infty$	• $-\infty < \log_a x < \infty$
Periodizität	• keine	• keine
Monotonie	• streng monoton steigend	• streng monoton fallend
Krümmung	• streng konkav	• streng konvex
Symmetrien	• keine	• keine
Asymptoten	• senkrechte Asymptote bei $x_0 = 0$	• senkrechte Asymptote bei $x_0 = 0$
Nullstellen	• $x_0 = 1$	• $x_0 = 1$
Sprungstellen	• keine	• keine
Polstellen	• keine	• keine
Extrema	• keine	• keine
Wendepunkte	• keine	• keine

Logarithmusfunktionen VI



Logarithmusfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen – hier am Beispiel von $\ln x$ (blau) und e^x (grün)

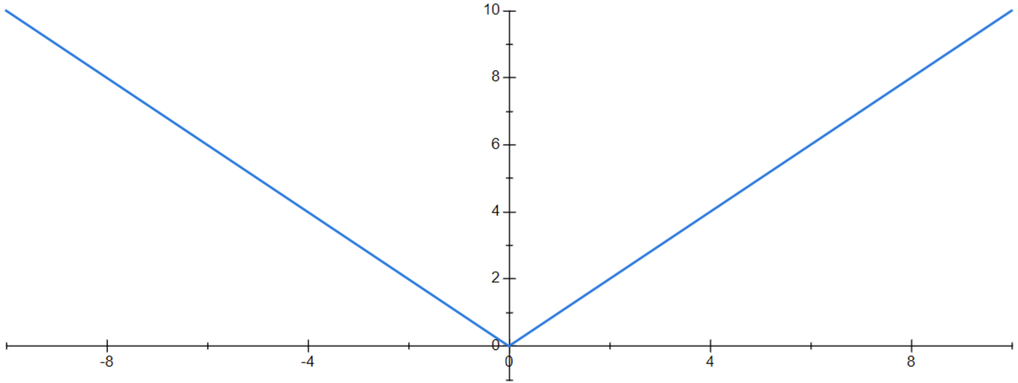
Kapitel XIII: Spezielle Funktionen

Betragsfunktion I

Die *Betragsfunktion* $|x|$ lässt sich für alle $x \in \mathbb{R}$ durch die folgende Formel ausdrücken:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{, für } x \geq 0 \\ -x & \text{, für } x < 0 \end{cases}$$

Betragsfunktion II



Graph der Betragsfunktion $|x|$

Betragsfunktion III

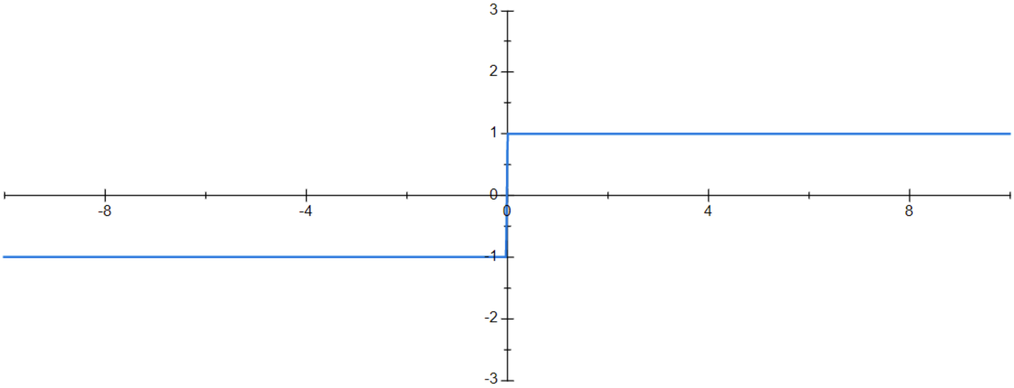
Definitionsbereich	• $-\infty < x < \infty$
Wertebereich	• $0 \leq \lvert x \rvert < \infty$
Periodizität	• keine
Monotonie	• streng monoton fallend für $x < 0$ • streng monoton steigend für $x \geq 0$
Krümmung	• keine
Symmetrien	• Achsensymmetrisch zur Ordinate • gerade Funktion
Asymptoten	• keine
Nullstellen	• $x_0 = 0$
Sprungstellen	• keine
Polstellen	• keine
Extrema	• keine
Wendepunkte	• keine

Vorzeichenfunktion I

Die *Vorzeichen-* oder *Signumfunktion* (abgekürzt: sgn) ist eine Funktion, die einer reellen Zahl ihr Vorzeichen zuordnet. Sie lässt sich für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ durch die folgende Formel ausdrücken:

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } x > 0 \\ 0 & \text{, falls } x = 0 \\ -1 & \text{, falls } x < 0 \end{cases}$$

Vorzeichenfunktion II



Graph der Signumfunktion $\operatorname{sgn}(x)$

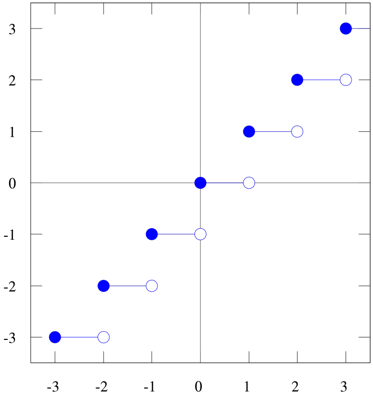
Vorzeichenfunktion III

Definitionsbereich	• $-\infty < x < \infty$
Wertebereich	• $\{-1, 0, 1\}$
Periodizität	• keine
Monotonie	• konstant für $x < 0$ • konstant für $x > 0$
Krümmung	• keine
Symmetrien	• Punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung • ungerade Funktion
Asymptoten	• $f(x) \to -1$ für $x \to -\infty$ • $f(x) \to 1$ für $x \to \infty$
Nullstellen	• $x_0 = 0$
Sprungstellen	• $x_0 = 0$
Polstellen	• keine
Extrema	• keine
Wendepunkte	• keine

Abrundungsfunktion I

Die *Abrundungsfunktion* (bzw. die *unteren Gauß-Klammern*) $\lfloor x \rfloor$ bildet die reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ auf die nächstliegende ganze Zahl ab, die kleiner oder gleich x ist.

Abrundungsfunktion II

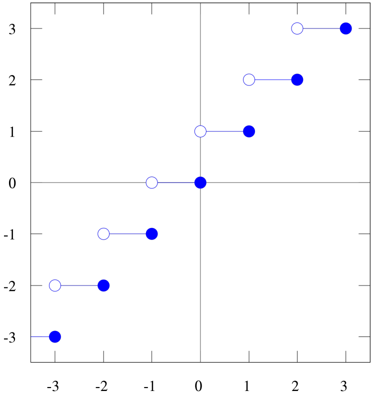


Graph der Abrundungsfunktion $\lfloor x \rfloor$

Aufrundungsfunktion I

Die *Aufrundungsfunktion* (bzw. die *oberen Gauß-Klammern*) $\lceil x \rceil$ bildet die reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ auf die nächstliegende ganze Zahl ab, die größer oder gleich x ist.

Aufrundungsfunktion II



Graph der Aufrundungsfunktion $\lceil x \rceil$

Kapitel XIV: Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen I

Im Folgenden wollen wir uns mit den *trigonometrischen Funktionen* beschäftigen. Dabei wollen wir uns auf reellwertige Funktionen beschränken.

Im Wesentlichen werden wir uns mit der *Sinus*-, *Cosinus*-, *Tangens*- und *Cotangensfunktion* beschäftigen und ihre Bedeutungen geometrisch veranschaulichen.

Trigonometrische Funktionen II

Zunächst einmal die Definitionen der *Sinus*- und *Cosinusfunktion*:

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned}$$

Trigonometrische Funktionen III

Und die Definitionen der *Tangens*- und *Cotangensfunktion*:

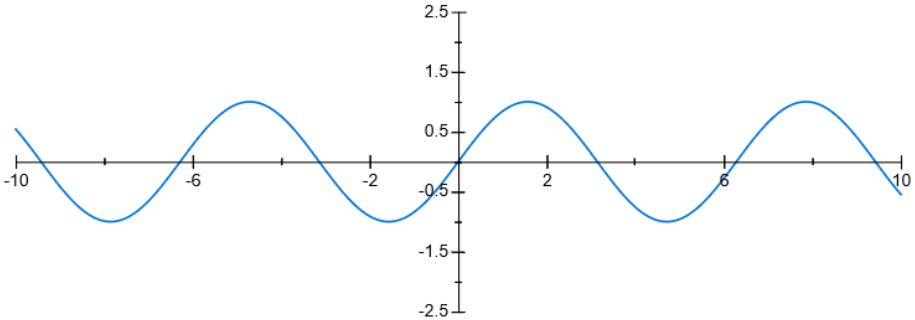
$$\begin{aligned} \tan : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cot(x) \end{aligned}$$

Es gilt

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{und} \quad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} \ .$$

Trigonometrische Funktionen IV

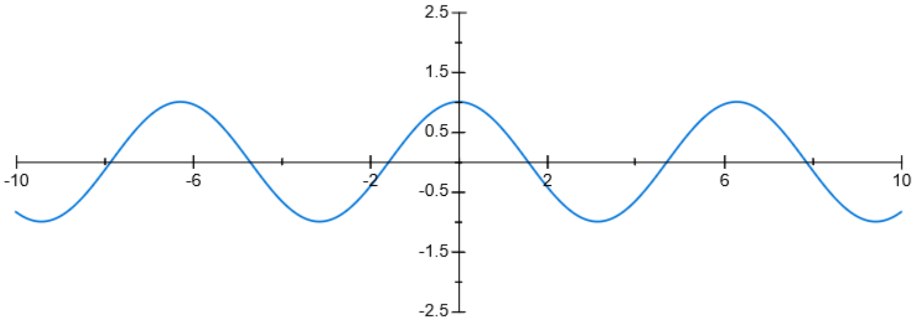


Graph der Sinusfunktion $\sin x$

Trigonometrische Funktionen V

Definitionsbereich	• $-\infty < x < \infty$
Wertebereich	• $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
Periodizität	• Periodisch mit Periodenlänge 2π • $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
Monotonie	• streng monoton steigend für $2n \cdot \pi \leq x \leq \left(2n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$ • streng monoton fallend für $\left(2n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi \leq x \leq \left(2n + \frac{3}{2}\right) \cdot \pi$ • streng monoton steigend für $\left(2n + \frac{3}{2}\right) \cdot \pi \leq x \leq (2n + 2) \cdot \pi$
Krümmung	• streng konkav für $2n \cdot \pi \leq x \leq (2n + 1) \cdot \pi$ • streng konvex für $(2n + 1) \cdot \pi \leq x \leq (2n + 2) \cdot \pi$
Symmetrien	• Punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung • ungerade Funktion
Asymptoten	• keine
Nullstellen	• $x = n \cdot \pi$
Sprungstellen	• keine
Polstellen	• keine
Extrema	• Minimum bei $x = \left(2n + \frac{3}{2}\right) \cdot \pi$ • Maximum bei $x = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$
Wendepunkte	• $x_1 = 2n \cdot \pi$ • $x_2 = (2n + 1) \cdot \pi$

Trigonometrische Funktionen VI

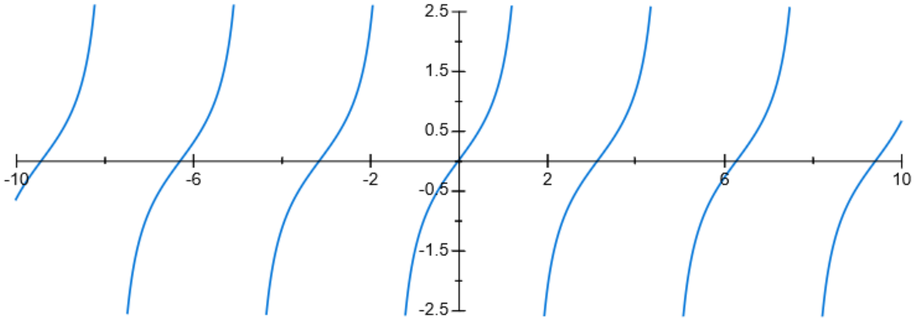


Graph der Cosinusfunktion $\cos x$

Trigonometrische Funktionen VII

Definitionsbereich	• $-\infty < x < \infty$
Wertebereich	• $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
Periodizität	• Periodisch mit Periodenlänge 2π • $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
Monotonie	• streng monoton fallend für $2n \cdot \pi \leq x \leq (2n+1) \cdot \pi$ • streng monoton steigend für $(2n+1) \cdot \pi \leq x \leq (2n+2) \cdot \pi$
Krümmung	• streng konkav für $2n \cdot \pi \leq x \leq \left(2n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$ • streng konvex für $\left(2n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi \leq x \leq \left(2n + \frac{3}{2}\right) \cdot \pi$ • streng konkav für $\left(2n + \frac{3}{2}\right) \cdot \pi \leq x \leq (2n+2) \cdot \pi$
Symmetrien	• Achsensymmetrisch zur Ordinate • gerade Funktion
Asymptoten	• keine
Nullstellen	• $x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$
Sprungstellen	• keine
Polstellen	• keine
Extrema	• Maximum bei $x = 2n \cdot \pi$ • Minimum bei $x = (2n+1) \cdot \pi$
Wendepunkte	• $x_1 = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$ • $x_2 = \left(2n + \frac{3}{2}\right) \cdot \pi$

Trigonometrische Funktionen VIII

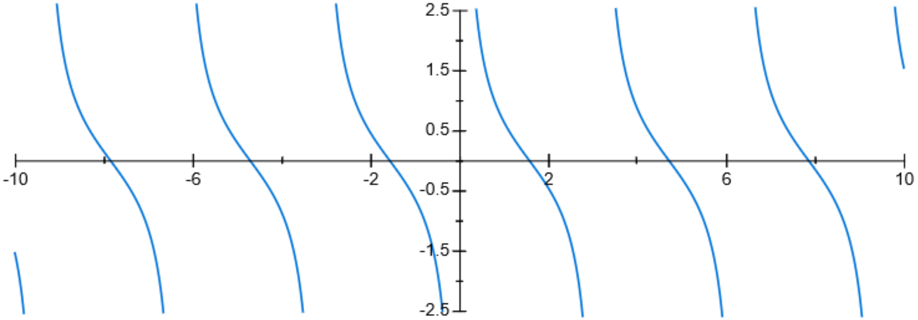


Graph der Tangensfunktion $\tan x$

Trigonometrische Funktionen IX

Definitionsbereich	• $\mathbb{R} \setminus \left\{ k \cdot \pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
Wertebereich	• $\mathbb{R}$
Periodizität	• Periodisch mit Periodenlänge π • $\tan(x + \pi) = \tan(x)$
Monotonie	• streng monoton steigend in allen Intervallen
Krümmung	• streng konkav für $x \in \left(k \cdot \pi - \frac{\pi}{2},\ k \cdot \pi\right]$ • streng konvex für $x \in \left[k \cdot \pi,\ k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\right)$
Symmetrien	• Punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung • ungerade Funktion
Asymptoten	• Senkrechte Asymptoten bei den Polstellen
Nullstellen	• $x = k \cdot \pi$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)
Sprungstellen	• keine
Polstellen	• $x = k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)
Extrema	• keine
Wendepunkte	• $x = k \cdot \pi$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)

Trigonometrische Funktionen X

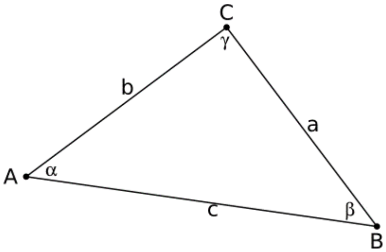


Graph der Cotangensfunktion $\cot x$

Trigonometrische Funktionen XI

Definitionsbereich	• $\mathbb{R} \setminus \left\{ k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
Wertebereich	• $\mathbb{R}$
Periodizität	• Periodisch mit Periodenlänge π • $\cot(x+\pi) = \cot(x)$
Monotonie	• streng monoton fallend in allen Intervallen
Krümmung	• streng konvex für $x \in \left(k \cdot \pi,\ k \cdot \pi + \frac{\pi}{2} \right]$ • streng konkav für $x \in \left[k \cdot \pi + \frac{\pi}{2},\ (k+1) \cdot \pi \right)$
Symmetrien	• Punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung • ungerade Funktion
Asymptoten	• Senkrechte Asymptoten bei den Polstellen
Nullstellen	• $x = k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)
Sprungstellen	• keine
Polstellen	• $x = k \cdot \pi$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)
Extrema	• keine
Wendepunkte	• $x = k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)

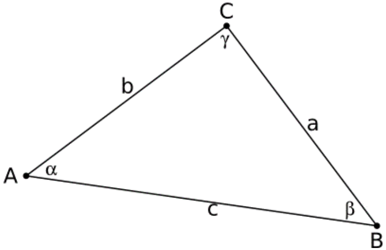
Geometrische Interpretation I



Im rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = \frac{\pi}{2}$) gelten die folgenden Bezeichnungen (bezogen auf den Winkel α):

- a: *Gegenkathete*
- b: *Ankathete*
- c: *Hypotenuse*

Geometrische Interpretation II

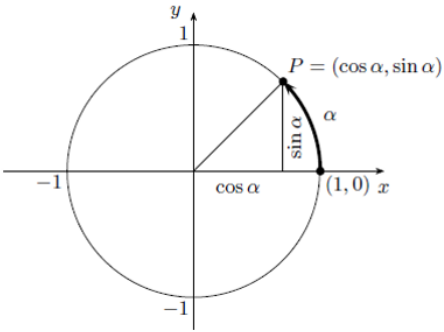


Im rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = \frac{\pi}{2}$) gilt:

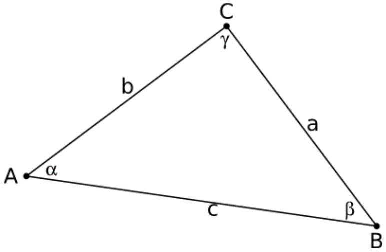
$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{\text{Gegenkathete des Winkels } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} \\
\cos\alpha &= \frac{\text{Ankathete des Winkels } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} \\
\tan\alpha &= \frac{\text{Gegenkathete des Winkels } \alpha}{\text{Ankathete des Winkels } \alpha} = \frac{a}{b} \\
\cot\alpha &= \frac{\text{Ankathete des Winkels } \alpha}{\text{Gegenkathete des Winkels } \alpha} = \frac{b}{a}
\end{aligned}$$

Geometrische Interpretation III

Interpretation am *Einheitskreis*:



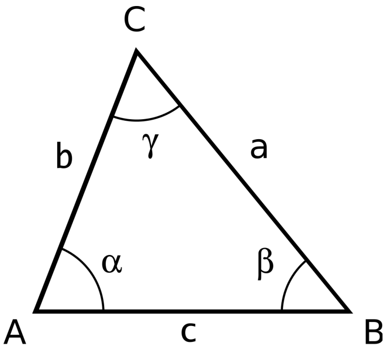
Satz des Pythagoras



Im rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = \frac{\pi}{2}$) gilt (*Satz des Pythagoras*):

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Kosinussatz



Für die drei Seiten a, b und c eines Dreiecks sowie für den der Seite c gegenüberliegenden Winkel γ gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma).$$

Sinus & Cosinus im Detail I

Wir wollen uns die Sinusfunktion etwas genauer ansehen.

$$f(x) = \alpha \cdot \sin\left(k \cdot x + \omega\right) + c$$

Bezeichnungen:

- α: die *Amplitude*
- k: der *Streckungs-/Stauchungsfaktor*
- $\varphi = \frac{\omega}{k}$: die *Phasenverschiebung*
- $\frac{2\pi}{k}$: *Periodenlänge*

Dieselben Aussagen treffen analog auf die Cosinusfunktion zu.

Sinus & Cosinus im Detail II

Jede Sinusfunktion lässt sich auch durch eine Cosinusfunktion darstellen (und umgekehrt), da diese lediglich in der Phase verschoben sind:

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Sinus & Cosinus im Detail III

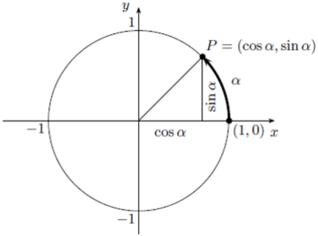
Einige wichtige Funktionswerte:

Winkel α (Grad)	0	30	45	60	90	180	270	360
Winkel α (Bogenmaß)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Aufgabe

Aufgabe

Die Berechnung von Sinus- und Cosinuswerten ist oft nur näherungsweise möglich. In einigen Fällen können die Werte jedoch auch exakt bestimmt werden. Führe dies exemplarisch für den Wert $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ durch.



Aufgabe

Lösung

Es gilt $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Anwenden des Satzes von Pythagoras ergibt:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \;=\; 1.$$

Wegen $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ folgt

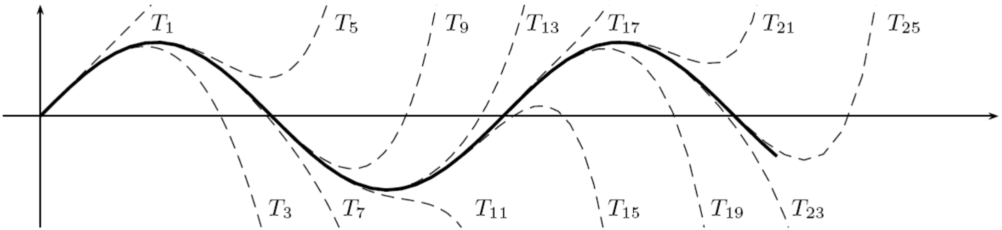
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \;=\; 1.$$

Umstellen nach $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ liefert die gesuchte Lösung:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Sinus & Cosinus im Detail IV

Die Funktionswerte für einen beliebigen Winkel α können beispielsweise über *Taylorpolynome* näherungsweise berechnet werden; diese werden im Studium behandelt.



Taylorpolynome T_1 bis T_{25} für $\sin x$

Rechenregeln I

Für die Addition von (verschiedenen) Winkeln gelten die folgenden *Additionstheoreme*:

$$\sin\left(\alpha \pm \beta\right) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos\left(\alpha \pm \beta\right) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

Daraus ergeben sich beispielsweise die Rechenregeln für den doppelten Winkel:

$$\sin\left(2\alpha\right) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos\left(2\alpha\right) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Rechenregeln II

Eine weitere wichtige Eigenschaft ist die folgende:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Sie lässt sich einfach am Einheitskreis beweisen. (Aufgabe!)

Umkehrfunktionen

Zu jeder der besprochenen trigonometrischen Funktionen gibt es eine entsprechende Umkehrfunktion, die dem Seitenverhältnis wieder den Winkel zuordnet:

- arcsin: *Arcussinus*;
- arccos: *Arcuscosinus*;
- arctan: *Arcustangens*;
- arccot: *Arcuscotangens*.

Aufgaben

Aufgabe XIV-1

Beschreibe (grob) den Verlauf der folgenden Funktion

$$x^2 \cdot cos(x).$$