Vorkurs: Mathematik für Informatiker

Teil 3

Wintersemester 2023/24

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Inhaltsverzeichnis

Kapitel XV: Das Summenzeichen

Das Summenzeichen I

Wir betrachten die Summe der ersten n natürlichen Zahlen:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n.$$

Aufgrund des sehr speziellen Aufbaus der Summe ist leicht zu erraten, welche Summanden abkürzend als $\ldots$ dargestellt sind.

Die Summe aus diesem Beispiel lässt sich mit dem *Summenzeichen* wie folgt darstellen:

$$\sum_{i=1}^{n} i.$$

Das Summenzeichen II

Etwas allgemeiner betrachten wir die folgende Summe:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Die Werte a_i sind alle nach demselben Schema aufgebaut.

Aufgrund des einheitlichen Aufbaus der Summanden ist auch hier gut zu erkennen, welche Summanden abkürzend als ... dargestellt sind.

Die entsprechende abkürzende Schreibweise mit dem Summenzeichen lautet:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Das Summenzeichen III

Es existieren zwei mögliche Schreibweisen für die Summe:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{m \leq i \leq n} a_i$$

Bezeichnungen:

- i: *Indexvariable, Laufvariable*
- m: *Startwert*
- n: *Endwert*
- a_i: der *i-te Summand*

Das Summenzeichen IV

Einige Beispiele:

- $\sum_{i=0}^{5} i = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
- $\sum_{k=2}^{7} k^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$
- $\sum_{i=1}^{4} \frac{i+1}{i} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4}$

Aufgaben

Aufgabe XV-1

Schreibe die folgenden Summen ohne das Summenzeichen:

a) $\displaystyle\sum_{1 \leq k \leq 4} a_k$ b) $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leq i \leq 10 \\ i:\text{ gerade}}} a_i$ c) $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leq j \leq 10 \\ j:\text{ ungerade}}} 2^j$

d) $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leq j \leq 15 \\ j:\text{ Primzahl}}} b_j$ e) $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leq k \leq 50 \\ k:\text{ Quadratzahl}}} a_k$

Hinweis: Es ist nicht notwendig, die Summen auszurechnen.

Addition von Summen I

Zur Erinnerung: Das Summenzeichen ist lediglich eine abkürzende Schreibweise.

Gegeben sind die folgenden beiden Summen:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$
$$\sum_{i=0}^{n} b_i = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$$

Frage: Wie sieht die Summe der beiden Summen aus?

$$\sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n} b_i$$

Addition von Summen II

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n} b_i &= (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) + (b_0 + b_1 + \ldots + b_n) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \ldots + (a_n + b_n) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)\end{aligned}$$

Subtraktion von Summen

Die Subtraktion von Summen funktioniert nach demselben Schema wie die Addition.

Gegeben sind die folgenden beiden Summen:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

$$\sum_{i=0}^{n} b_i = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$$

Als Differenz ergibt sich:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i - \sum_{i=0}^{n} b_i = \sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i)$$

Ausklammern von gemeinsamen Faktoren

Da die Notation mit dem Summenzeichen nur eine Kurzschreibweise für „normale Summen“ ist, dürfen natürlich alle Regeln der normalen Summen auch mit dem Summenzeichen verwendet werden. Insbesondere gilt dies für die Möglichkeit, gemeinsame Faktoren auszuklammern:

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda \cdot a_i = \lambda \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i .$$

Multiplikation von Summen I

Gegeben sind die folgenden beiden Summen:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

$$\sum_{j=0}^{m} b_j = b_0 + b_1 + \ldots + b_m$$

Frage: Wie sieht das Produkt der beiden Summen aus?

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j\right)$$

Multiplikation von Summen II

Bei der Multiplikation wird jedes Element der ersten Summe mit jedem Element der zweiten Summe multipliziert:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j\right) &= (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) \cdot (b_0 + b_1 + \ldots + b_m) \\
&= a_0 b_0 + \ldots + a_0 b_m + \ldots + a_n b_0 + \ldots + a_n b_m \\
&= (a_0 b_0 + \ldots + a_0 b_m) + \ldots + (a_n b_0 + \ldots + a_n b_m) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (a_i b_0 + a_i b_1 + \ldots + a_i b_m) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_i b_j\right)
\end{aligned}$$

Multiplikation von Summen III

Als Produkt der beiden Summen ergibt sich also:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j\right) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_i b_j\right).$$

Man nennt dies auch das *allgemeine Distributivgesetz*.

Multiplikation von Summen IV

Beispiel:

$$\left(\sum_{i=0}^{1} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{2} b_j\right) = (a_0 + a_1) \cdot (b_0 + b_1 + b_2)$$
$$= a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_0 b_2 + a_1 b_0 + a_1 b_1 + a_1 b_2$$

Doppelsummen I

Als *Doppelsumme* bezeichnet man eine Summe, die über einer Summe definiert ist.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

Sind die Indizes der Summen unabhängig, darf die Reihenfolge der Summenzeichen vertauscht werden:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Doppelsummen II

Dies ist leicht einzusehen:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} &= \sum_{i=1}^{n}\left(a_{i1} + \ldots + a_{im}\right) \\
&= \left(a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1m}\right) + \ldots + \left(a_{n1} + a_{n2} + \ldots + a_{nm}\right) \\
&= \left(a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{n1}\right) + \ldots + \left(a_{1m} + a_{2m} + \ldots + a_{nm}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\left(a_{1j} + \ldots + a_{nj}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}
\end{aligned}
$$

Indextransformationen I

Als *Indextransformation* werden solche Umformungen bezeichnet, die nur mit den Indizes der Summanden bzw. der Summe geschehen, ohne dabei den Wert der Summe zu verändern.

Indextransformationen II

Eine sehr einfache Indextransformation ist das Verschieben des *Summationsindex* um 1:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i-1}.$$

Indextransformationen III

Es ist leicht einzusehen, dass diese beiden Summen gleich sind:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} a_{i-1} &= a_{1-1} + a_{2-1} + \ldots + a_{(n+1)-1} \\ &= a_0 + a_1 + \ldots + a_n\end{aligned}$$

Indextransformationen IV

Im Allgemeinen darf man selbstverständlich den Summationsindex auch um einen beliebigen konstanten Wert verschieben:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k}$$

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m-k}^{n-k} a_{i+k}$$

Indextransformationen V

Eine weitere Indextransformation ergibt sich daraus, dass die Notation mit dem Summenzeichen nur eine abkürzende Schreibweise darstellt und die Addition kommutativ ist:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}.$$

Indextransformationen VI

Auch diese Gleichheit ist leicht einzusehen:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} a_i &= a_0 + a_1 + \ldots + a_n \\ &= a_n + \ldots + a_1 + a_0 \\ &= a_{n-0} + \ldots + a_{n-(n-1)} + a_{n-n} \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}.\end{aligned}$$

Indextransformationen VII

Die Umformung auf der vorherigen Folie ist nur gültig, falls die Summe den Startwert 0 besitzt. Für alle anderen Startwerte gilt die folgende Umformung:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_{(n+m)-i}.$$

Aufgaben

Aufgabe XV-2

Entscheide, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Begründe deine Antworten!

a) $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} a_i = \sum_{j=6}^{n+4} a_{j-4}$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i-1}$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} i = \sum_{i=2}^{7} (i-2)$

d) $\displaystyle\sum_{k=4}^{8} a_k = \sum_{k=4}^{8} a_{8-k}$

Teleskopsummen

Teleskopsummen sind Summen der folgenden Art:

$$\sum_{i=0}^{n} \big(a_i - a_{i+1}\big).$$

Aufgrund des besonderen Aufbaus der Summanden heben sich beim Aufsummieren die meisten der Summanden gegenseitig auf:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} \big(a_i - a_{i+1}\big) &= \big(a_0 - a_1\big) + \big(a_1 - a_2\big) + \ldots + \big(a_n - a_{n+1}\big) \\ &= a_0 + \big(-a_1 + a_1\big) + \ldots + \big(-a_n + a_n\big) - a_{n+1} \\ &= a_0 - a_{n+1}.\end{aligned}$$

Das Produktzeichen

Wir betrachten das folgende Produkt der Werte $a_1, \ldots, a_n$:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n.$$

Analog zu Summen kann dieses Produkt mithilfe des *Produktzeichens* kompakt dargestellt werden:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i.$$

Kapitel XVI: Polynome

Definition I

Ein *Polynom* ist ein Ausdruck der folgenden Form:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Ein Polynom lässt sich mit dem Summenzeichen auch wie folgt darstellen:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Als *Grad des Polynoms* bezeichnet man die höchste im Polynom vorkommende Potenz n.

Definition II

Beispiele:

- $a(x) = 2x^2 + 3x - 7$
- $b(x) = -x^3 + 4$
- $c(x) = x^{10} + x^8 - x^6 + 2x^5 + 10x^4 - x + 1$
- $d(x) = 1$

Definition III

Eine *Nullstelle* eines Polynoms p ist ein Wert x_0, für den gilt:

$$p(x_0) = 0.$$

Ein Polynom vom Grad n besitzt höchstens n reelle Nullstellen (und exakt n komplexe Nullstellen) – allerdings besitzt nicht jedes Polynom reelle Nullstellen. Ein Beispiel hierfür ist das folgende *irreduzible Polynom*:

$$x^2 + 1.$$

Hat ein Polynom einen ungeraden Grad, so besitzt es stets mindestens eine reelle Nullstelle.

Addition & Subtraktion von Polynomen I

Gegeben seien zwei Polynome $a(x)$ und $b(x)$ (mit $m, n \in \mathbb{N}$):

$$a(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$
$$b(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

Die Summe $c(x)$ dieser beiden Polynome lässt sich wie folgt berechnen (nicht vorhandene Koeffizienten a_k bzw. b_k haben per Definition den Wert 0):

$$c(x) = a(x) + b(x) = \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k + b_k)\, x^k.$$

Addition & Subtraktion von Polynomen II

Gegeben seien zwei Polynome $a(x)$ und $b(x)$ (mit $m, n \in \mathbb{N}$):

$$a(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$b(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

Die Differenz $c(x)$ dieser beiden Polynome lässt sich wie folgt berechnen (nicht vorhandene Koeffizienten a_k bzw. b_k haben per Definition den Wert 0):

$$c(x) = a(x) - b(x) = \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k - b_k)\, x^k.$$

Addition & Subtraktion von Polynomen III

Beispiel:

Gegeben seien die beiden Polynome $a(x)$ und $b(x)$.

$$\begin{aligned} a(x) &= x^3 + 2x^2 - 5x + 3 \\ b(x) &= x^2 + x - 1 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} a(x) + b(x) &= x^3 + (2+1)x^2 + (-5+1)x + (3-1) \\ &= x^3 + 3x^2 - 4x + 2 \\ a(x) - b(x) &= x^3 + (2-1)x^2 + (-5-1)x + (3-(-1)) \\ &= x^3 + x^2 - 6x + 4 \end{aligned}$$

Multiplikation von Polynomen I

Gegeben seien zwei Polynome $a(x)$ und $b(x)$ (mit $m, n \in \mathbb{N}$):

$$a(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$
$$b(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

Das Produkt dieser beiden Polynome lässt sich auf die folgenden Arten berechnen:

$$a(x) \cdot b(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i \cdot b_j \cdot x^{i+j} \qquad \text{bzw.}$$
$$a(x) \cdot b(x) = \sum_{i=0}^{m+n} \left(x^i \cdot \sum_{k=0}^{i} (a_k \cdot b_{i-k}) \right)$$

Multiplikation von Polynomen II

Beispiel:

Gegeben seien die beiden Polynome $a(x)$ und $b(x)$.

$$
\begin{aligned}
a(x) &= x^3 + 2x^2 - 5x + 3 \\
b(x) &= x^2 + x - 1
\end{aligned}
$$

Hieraus ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
a(x) \cdot b(x) &= x^3 \cdot x^2 + x^3 \cdot x + x^3 \cdot (-1) \\
&+ 2x^2 \cdot x^2 + 2x^2 \cdot x + 2x^2 \cdot (-1) \\
&- 5x \cdot x^2 - 5x \cdot x - 5x \cdot (-1) \\
&+ 3x^2 + 3x + 3 \cdot (-1) \\
&= x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 8x - 3
\end{aligned}
$$

Division von Polynomen I

Zu je zwei Polynomen $a(x)$ und $b(x)$ mit $b(x) \neq 0$ gibt es eindeutig bestimmte Polynome $q(x)$ und $r(x)$ mit $\mathrm{grad}(r(x)) < \mathrm{grad}(b(x))$ oder $r(x) = 0$, so dass

$$a(x) = q(x)b(x) + r(x)$$

gilt. Man nennt dies eine *Zerlegung mit Rest* von $a(x)$ bezüglich $b(x)$.

Division von Polynomen II

Beispiel:

Gegeben seien die beiden Polynome $a(x)$ und $b(x)$.

$$\begin{aligned} a(x) &= 2x^4 + x^3 + x + 3 \\ b(x) &= x^2 + x - 1 \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{array}{rlllll}
 & 2x^4 & +x^3 & & +x & +3 \quad : (x^2 + x - 1) = 2x^2 - x + 3 \\
- & (2x^4 & +2x^3 & -2x^2) & & \\
\hline
 & & -x^3 & +2x^2 & +x & +3 \\
- & & (-x^3 & -x^2 & +x) & \\
\hline
 & & & 3x^2 & & +3 \\
- & & & (3x^2 & +3x & -3) \\
\hline
 & & & & -3x & +6
\end{array}$$

Division von Polynomen III

Als Ergebnis erhält man die folgende Zerlegung mit Rest:

$$\underbrace{2x^4 + x^3 + x + 3}_{a(x)} = \underbrace{(2x^2 - x + 3)}_{q(x)} \underbrace{(x^2 + x - 1)}_{b(x)} + \underbrace{(-3x + 6)}_{r(x)} .$$

Das Ergebnis lässt sich auch wie folgt schreiben:

$$\frac{2x^4 + x^3 + x + 3}{x^2 + x - 1} = 2x^2 - x + 3 + \frac{-3x + 6}{x^2 + x - 1} .$$

Aufgabe XVI-1

Gegeben seien die folgenden beiden Polynome $a(x)$ und $b(x)$.

$$\begin{aligned} a(x) &= x^3 + 2x^2 - 5x + 3 \\ b(x) &= x + 2 \end{aligned}$$

Berechne die folgenden Ausdrücke:

a) $a(x) + b(x)$

b) $a(x) - b(x)$

c) $a(x) \cdot b(x)$

d) $a(x) : b(x)$

Kapitel XVII: Gleichungen & Gleichungssysteme

Lösen von linearen Gleichungen

Gegeben sei die folgende *lineare Gleichung*:

$$ax + b = 0.$$

Für gegebene Werte $a, b \in \mathbb{R}$ lässt sich die einzige Lösung direkt durch Umstellen berechnen:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Lösen von quadratischen Gleichungen I

Gegeben sei die folgende *quadratische Gleichung*:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Für gegebene $p, q \in \mathbb{R}$ lässt sich die Lösung wie folgt berechnen:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Lösen von quadratischen Gleichungen II

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

- Fall 1: $\frac{p^2}{4} - q > 0$

  Es gibt genau zwei reelle Lösungen.

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

- Fall 2: $\frac{p^2}{4} - q = 0$

  Es gibt genau eine reelle Lösung.

$$x_1 = -\frac{p}{2}$$

Lösen von quadratischen Gleichungen III

- Fall 3: $\frac{p^2}{4} - q < 0$

  Es gibt keine reellen Lösungen.

Lösen von quadratischen Gleichungen IV

Gegeben sei die folgende quadratische Gleichung:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Für gegebene $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ lässt sich die Lösung wie folgt berechnen:

$$x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}.$$

Analog zur Gleichung $x^2+px+q = 0$ sind auch hier verschiedene Fälle zu unterscheiden. (Welche nämlich?)

Lösen von quadratischen Gleichungen V

Aufgabe XVII-1

Löse die folgenden quadratischen Gleichungen.

a) $x^2 + 2x - 8 = 0$
b) $4x^2 - 8 = 20$
c) $3x^2 = x$
d) $5x^2 - 5x = 0$
e) $-49x^2 + 16x = -12$
f) $3x^2 = 2x^2 - 1$

Lösen von kubischen Gleichungen I

Gegeben sei die folgende kubische Gleichung:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0.$$

Division durch A führt auf die *Normalform*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a = \frac{B}{A}$, $b = \frac{C}{A}$ und $c = \frac{D}{A}$. Durch die Substitution $x = y - \frac{a}{3}$ erhält man die *reduzierte Form*

$$y^3 + py + q = 0.$$

Lösen von kubischen Gleichungen II

Die reduzierte Gleichung kann mithilfe der *Cardanischen Formeln* gelöst werden:

$$\begin{aligned} y_1 &= u + v \\ y_2 &= -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2} \cdot i\sqrt{3} \\ y_3 &= -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2} \cdot i\sqrt{3} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ v &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \end{aligned}$$

Lösen von kubischen Gleichungen III

Für die *Diskriminante* $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ gilt:

- Fall 1: $D > 0$
  Es gibt eine reelle und zwei konjugiert komplexe Lösungen.
- Fall 2: $D = 0$
  Es gibt drei reelle Lösungen, darunter eine Doppelwurzel.
- Fall 3: $D < 0$
  Es gibt drei reelle Lösungen, die sich auf goniometrischem Weg berechnen lassen.

Lösen von kubischen Gleichungen IV

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)$$

$$y_2 = -2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} - 60^\circ\right)$$

$$y_3 = -2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 60^\circ\right)$$

Der Wert φ lässt sich aus der folgenden Gleichung berechnen:

$$\cos\varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}}.$$

Die entsprechenden x-Werte folgen aus der anfänglichen Substitution:

$$x = y + \frac{a}{3}.$$

Lösen von linearen Gleichungssystemen I

Das folgende *lineare Gleichungssystem* besteht aus zwei Gleichungen und zwei Variablen:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2. \end{aligned}$$

Als Lösung dieses Gleichungssystems zählt jedes Paar (x_0, y_0), das beide Gleichungen erfüllt.

Analog verhält es sich bei einer beliebigen Anzahl von Gleichungen und einer beliebigen Anzahl von Variablen:

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \ldots + c_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Lösen von linearen Gleichungssystemen II

Es gibt viele Möglichkeiten, ein Gleichungssystem zu lösen.

Einige Beispiele:

- Geschickte Addition oder Subtraktion der Gleichungen;
- Umstellen einer Gleichung nach einer Variable und anschließendes Einsetzen in die anderen Gleichungen;
- Gleichsetzen von zwei Gleichungen;
- *Gauß-Verfahren* (nur für lineare Gleichungssysteme, wird in der Vorlesung besprochen);
- *Gauß-Jordan-Verfahren*.

Aufgaben

Aufgabe XVII-2

Löse die folgenden Gleichungssysteme. Wähle dazu möglichst geschickte Verfahren und mache die Probe.

a) $$\begin{aligned} 3x - 2y + 7 &= 7 \\ x + 2y &= 5 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x &= 2y - 5 \\ 0 &= 3 - y \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} y &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x \\ y &= 1 - x \end{aligned}$$

Aufgaben

Aufgabe XVII-3

a) Paul und sein Vater sind zusammen 33 Jahre alt. In 30 Jahren wird Paul halb so alt wie sein Vater sein. Wie alt sind Paul und sein Vater?

b) Michael ist jetzt halb so alt wie seine Mutter. In zwei Jahren werden beide zusammen 100 sein. Wie alt sind Michael und seine Mutter?

Aufgaben

Aufgabe XVII-4

Löse das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 5 \\ -2x_1 - 5x_2 - 8x_3 &= -8 \end{aligned}$$

Kapitel XVIII: Logische Verknüpfungen, Quantoren & Bedingungen

Logische Verknüpfungen I

A und B seien Aussagen, die entweder wahr oder falsch sein können.

- *Konjunktion*: $A \wedge B$

  Die Aussage $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr ist.

- *Disjunktion*: $A \vee B$

  Die Aussage $A \vee B$ ist wahr, wenn entweder A oder B wahr ist; oder natürlich auch beide.

Logische Verknüpfungen II

A und B seien Aussagen, die entweder wahr oder falsch sein können.

- *Implikation*: $A \Rightarrow B$

  Die Aussage $A \Rightarrow B$ bedeutet, dass immer, wenn A wahr ist, auch B wahr ist. („B folgt aus A.“)

- *Biimplikation*: $A \Leftrightarrow B$

  Die Aussage $A \Leftrightarrow B$ bedeutet, dass immer, wenn A wahr ist, auch B wahr ist – und umgekehrt. („genau dann wenn“)

Logische Verknüpfungen III

A sei eine Aussage, die entweder wahr oder falsch sein kann.

- *Negation*: $\overline{A}$

  Die Aussage $\overline{A}$ ist genau dann wahr, wenn die Aussage A falsch ist.

Logische Verknüpfungen IV

Beispiele:

- $A \wedge B \wedge C$
- $A \wedge (B \vee C)$
- $A \Rightarrow (\overline{B} \wedge C)$
- $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

Quantoren

Soll eine Aussage darüber getroffen werden, ob eine Bedingung für mindestens einen oder für alle Werte gilt, können sogenannte *Quantoren* verwendet werden:

- *Allquantor*: $\forall x : A$

  Der Allquantor $\forall$ besagt, dass die Aussage A für alle x gilt.

- *Existenzquantor*: $\exists x : A$

  Der Existenzquantor $\exists$ besagt, dass es mindestens ein x gibt, für das die Aussage A gilt.

Notwendige Bedingungen

Bei einer *notwendigen Bedingung* B für eine Aussage K handelt es sich um eine Bedingung, die den folgenden Eigenschaften genügt:

- Ist die Aussage K wahr, so ist auch stets die Bedingung B erfüllt.
- Ist die Bedingung B nicht erfüllt, so ist die Aussage K auf jeden Fall falsch.
- Ist die Bedingung B erfüllt, so *könnte* die Aussage K wahr sein.

Die Bedingung B ist lediglich eine erforderliche Voraussetzung für die Aussage K. Mit ihr kann stets festgestellt werden, ob die Aussage K falsch ist – sie genügt jedoch nicht, um zu entscheiden, ob K wahr ist.

Hinreichende Bedingungen

Bei einer *hinreichenden Bedingung* B für eine Aussage K handelt es sich um eine Bedingung, die den folgenden Eigenschaften genügt:

- Ist die Bedingung B erfüllt, so ist auch die Aussage K wahr.
- Die Bedingung B ist nicht notwendig. K kann wahr sein, selbst wenn B nicht erfüllt ist.
- Es ist kein Rückschluss von K auf die Bedingung B möglich.