Vorkurs: Mathematik für Informatiker

Teil 4

Wintersemester 2023/24

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Inhaltsverzeichnis

Kapitel XIX: Beweistechniken

Einleitung

Es kommt in der Mathematik (und auch in vielen Bereichen der Informatik) häufig vor, dass man in die Situation gerät, eine gefundene Behauptung beweisen zu müssen, beispielsweise:

- ein Rechengesetz;
- eine bestimmte Eigenschaft;
- eine gefundene geschlossene Formel für einen Ausdruck;
- die allgemeine Gültigkeit einer Umformung;
- etc.

Im Folgenden werden aus diesem Grund einige grundlegende Beweistechniken vorgestellt.

Konstruktive & nicht-konstruktive Beweise

Bei einem *konstruktiven Beweis* wird entweder die Lösung selbst genannt oder ein Verfahren angegeben, das zur Lösung führt; d.h., es wird *eine Lösung konstruiert*.

Bei einem *nicht-konstruktiven Beweis* wird anhand von Eigenschaften auf die Existenz einer Lösung geschlossen. Manchmal wird sogar indirekt die Annahme, es gäbe keine Lösung, zu einem Widerspruch geführt, woraus folgt, dass es eine Lösung geben muss. Aus solchen Beweisen geht (zumeist) jedoch nicht hervor, wie man die Lösung gewinnt.

Direkte & indirekte Beweise

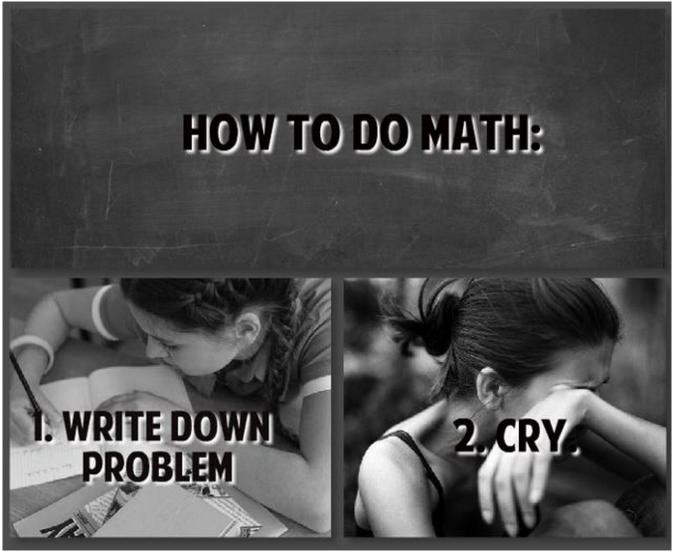
Bei einem *direkten Beweis* wird die Behauptung durch Anwendung von bereits bewiesenen Aussagen und durch logische Folgerungen bewiesen.

Bei einem *indirekten Beweis* (*Widerspruchsbeweis*) zeigt man, dass unter der Annahme, die zu beweisende Behauptung sei falsch, ein Widerspruch entsteht. Dazu nimmt man an, dass die Behauptung falsch ist und wendet anschließend dieselben Methoden wie beim direkten Beweis an. Resultiert daraus ein Widerspruch, so kann die ursprüngliche Behauptung nicht falsch sein – also muss sie richtig sein (*Satz vom ausgeschlossenen Dritten*). Eine wichtige (und keinesfalls selbstverständliche!) Voraussetzung für die Gültigkeit eines Widerspruchsbeweises ist, dass die Aussage im zugrundeliegenden System nicht zugleich wahr und falsch sein kann (*Widerspruchsfreiheit*).

Übersicht über Beweismethoden

Im Folgenden wollen wir uns mit einigen Beweisverfahren etwas näher beschäftigen:

- konstruktive Beweise
- Schubfachprinzip
- Widerspruchsbeweise
- (vollständige) Induktion


HOW TO DO MATH:
1. WRITE DOWN PROBLEM
2. CRY.

Genereller Aufbau

Ein Beweis sollte generell die folgenden Punkte enthalten:

- die zu beweisende Aussage sollte von Anfang an klar ersichtlich sein;
- einen nachvollziehbaren Beweis, in dem alle wesentlichen Rechenschritte, Umformungen, Folgerungen usw. enthalten sind;
- eine Schlussfolgerung aus dem Beweis. (Ist die Annahme richtig oder nicht?)

Konstruktive Beweise I

Nochmal zur Erinnerung:

Bei einem konstruktiven Beweis wird entweder die Lösung selbst genannt oder ein Verfahren angegeben, das zur Lösung führt; d.h., es wird eine Lösung konstruiert.

Konstruktive Beweise II

Behauptung:

Das Quadrat einer geraden ganzen Zahl n ist stets gerade.

Konstruktive Beweise III

Beweis:

Es sei n eine gerade ganze Zahl. Dann lässt sich n als $n = 2k$ darstellen, wobei k eine ganze Zahl ist. Hieraus folgt:

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot \underbrace{(2k^2)}_{\in \mathbb{Z}}.$$

Aus dieser Darstellung folgt, dass n^2 gerade ist. $\square$

Aufgaben

Aufgabe XIX-1

Beweise die folgende Behauptung: Das Quadrat einer ungeraden ganzen Zahl n ist stets ungerade.

Aufgabe XIX-2

Finde eine Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen, also für die Summe $1 + 2 + \ldots + n$. Hinweis: Das Ergebnis ist $\frac{n(n+1)}{2}$.

Schubfachprinzip I

Das *Schubfachprinzip* geht auf den deutschen Mathematiker *Dirichlet* zurück und kann sehr anschaulich formuliert werden:

Verteilt man $n+1$ Gegenstände auf n Schubfächer, dann befinden sich in mindestens einem Schubfach mindestens zwei Gegenstände.

Allgemein: Verteilt man $k \cdot n + 1$ Gegenstände auf n Schubfächer, dann befinden sich in mindestens einem Schubfach mindestens $k+1$ Gegenstände.

Schubfachprinzip II

Behauptung:

Unter 13 Personen gibt es mindestens 2 Personen, die im selben Monat Geburtstag haben.

Schubfachprinzip III

Beweis:

Diese Behauptung ist leicht einzusehen. Gehen wir vom „Worst-Case-Szenario“ aus, haben die Personen alle in einem anderen Monat Geburtstag. Da das Jahr jedoch nur 12 Monate hat, können höchstens 12 Personen unterschiedliche Geburtsmonate haben. Person 13 hat auf jeden Fall im gleichen Monat wie mindestens eine der anderen 12 Personen Geburtstag, womit die Aussage bewiesen ist. □

Widerspruchsbeweise I

Nochmal zur Erinnerung:

Bei einem *Widerspruchsbeweis* zeigt man, dass unter der Annahme, die zu beweisende Aussage sei falsch, ein Widerspruch entsteht. Man schließt daraus, dass die ursprüngliche Behauptung richtig sein muss.

Widerspruchsbeweise II

Behauptung:

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.

Widerspruchsbeweise III

Beweis:

Wir wollen annehmen, dass die Behauptung falsch ist, d.h., wir nehmen an, dass es ein $a \in \mathbb{Q}$ gibt, für das $a^2 = 2$ gilt. Diese Annahme führen wir zum Widerspruch, woraus folgt, dass die ursprüngliche Aussage richtig sein muss.

Da $a \in \mathbb{Q}$ gilt, lässt sich a als Bruch darstellen, d.h., $a = \frac{m}{n}$ für $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$. Wir können o.B.d.A. voraussetzen, dass der Bruch $\frac{m}{n}$ in vollständig gekürzter Form vorliegt. Aus $a^2 = 2$ und $a = \frac{m}{n}$ folgt $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, woraus folgt:

$$m^2 = 2n^2.$$

Widerspruchsbeweise IV

Folglich ist m^2 eine gerade Zahl. Dann ist folglich auch m eine gerade Zahl, d.h., $m = 2k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Setzt man dies in $m^2 = 2n^2$ ein, so folgt $4k^2 = 2n^2$, woraus $n^2 = 2k^2$ folgt. Also ist n^2 eine gerade Zahl, woraus folgt, dass auch n gerade ist.

Demnach gilt $n = 2k'$ für ein $k' \in \mathbb{Z}$. Wir haben also $m = 2k$ und $n = 2k'$ gezeigt. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass $\frac{m}{n}$ in vollständig gekürzter Form vorliegt.

Die Annahme $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ wurde zum Widerspruch geführt, womit die ursprüngliche Aussage $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ bewiesen ist. $\square$

Aufgaben

Aufgabe XIX-3

Ein Mensch besitzt typischerweise 100.000 bis 200.000 Haare, mit Sicherheit aber weniger als 1 Million Haare. Wie kann diese Aussage genutzt werden, um zu beweisen, dass in Hamburg mindestens zwei Menschen mit derselben Anzahl an Haaren leben?

Aufgabe XIX-4

Beweise die folgende Aussage: Die Zahl $\sqrt{3}$ ist eine irrationale Zahl.

Aufgabe XIX-5

Beweise die folgende Aussage: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Vollständige Induktion I

Vollständige Induktion ist eine häufig angewandte Methode, sowohl in der Mathematik als auch in der Informatik. Sie dient

- zum *Nachweis* der Richtigkeit von Behauptungen oder Vermutungen (vollständige Induktion als Beweismethode);
- zur *Definition* von Objekten oder Operationen (vollständige Induktion als Definitionsmethode); mit dieser Methode gewonnene Definitionen werden auch *rekursive Definitionen* genannt.

Vollständige Induktion II

Vollständige Induktion als Beweismethode wird bei Problemen der folgenden Art angewandt: Für jede natürliche Zahl n sei $A(n)$ eine Aussage. Es soll bewiesen werden, dass $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n gilt, d.h., es soll die Gültigkeit der unendlich vielen Aussagen $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$ ... nachgewiesen werden.

Vollständige Induktion III

Um eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen, genügt es, Folgendes zu zeigen:

(I) *Induktionsanfang*

$A(1)$ ist richtig.

(II) *Induktionsschritt*

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Falls $A(n)$ richtig ist, so ist auch die Aussage $A(n+1)$ richtig.

Vollständige Induktion IV

Behauptung:

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen (d.h. $1 + 2 + \ldots + n$) ist gleich $\frac{n(n+1)}{2}$.

Vollständige Induktion V

Beweis:

Mit vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass $A(n)$ nicht nur für bestimmte n, sondern für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(I) Induktionsanfang

$A(1)$ ist richtig, da $1 = \dfrac{1 \cdot (1+1)}{2}$ gilt.

Vollständige Induktion VI

(II) Induktionsschritt

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebig gewählte natürliche Zahl; wir setzen voraus, dass $A(n)$ für dieses n richtig ist, d.h., es gelte (für dieses n):

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\big(n+1\big)}{2} . \qquad (\star)$$

Wir haben zu zeigen, dass unter dieser Voraussetzung auch $A(n+1)$ richtig ist, d.h., wir müssen Folgendes nachweisen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{\big(n+1\big)\big((n+1)+1\big)}{2} .$$

Vollständige Induktion VII

Dies ergibt sich durch die folgende Rechnung:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \\
&\overset{(\star)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&\overset{\text{Zusammenfassen}}{=} \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&\overset{(n+1)\text{ ausklammern}}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}
\end{aligned}
$$

Damit sind (I) und (II) gezeigt; nach dem Induktionsprinzip gilt $A(n)$ also für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Aufgaben

Aufgabe XIX-6

Beweise die folgende Aussage mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Aufgabe XIX-7

Beweise die folgende Aussage mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2.$$

Aufgaben

Aufgabe XIX-8

Gegeben sei ein Quadrat mit einer Kantenlänge von 2^n, das aus insgesamt 2^n mal 2^n Feldern besteht. Bei n handelt es sich um eine natürliche Zahl.
Zeige, dass es stets möglich ist, das Quadrat so mit „L“-förmigen Stücken (aus insgesamt je 3 Feldern) überdeckungsfrei zu belegen, dass ausschließlich das Feld in der oberen rechten Ecke nicht bedeckt wird.

Kapitel XX: Vektoren

Definition I

Im allgemeinen Sinn versteht man in der linearen Algebra unter einem *Vektor* ein Element eines *Vektorraums*, d.h. ein Objekt, das zu anderen Vektoren addiert und mit Zahlen, die *Skalare* genannt werden, multipliziert werden kann. (Quelle: Wikipedia)

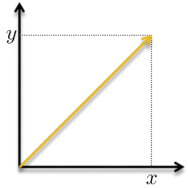
Definition II

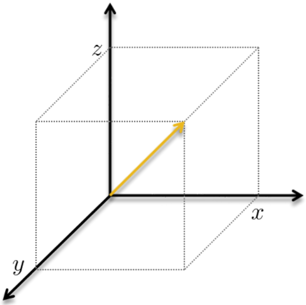
In der analytischen Geometrie kann man einen Vektor als ein Objekt auffassen, das eine *Parallelverschiebung* in der *Ebene* oder im *Raum* beschreibt.

Ein Vektor kann als Pfeil aufgefasst werden, der einen *Urbildpunkt* mit seinem *Bildpunkt* verbindet.

Definition III

Jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ bzw. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ kann ein Vektor zugeordnet werden.





Dies gilt analog ebenfalls für alle $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Schreibweise I

Ein Vektor kann wie folgt dargestellt werden:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Anstatt die einzelnen Einträge mit x, y oder z zu bezeichnen, ist auch die folgende Notation sehr gebräuchlich:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Schreibweise II

Bisher haben wir Vektoren immer als *Spaltenvektoren* betrachtet:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man Vektoren aber auch als *Zeilenvektoren* betrachten:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.$$

Zur besseren Übersicht dürfen zwischen den einzelnen Einträgen auch Trennzeichen – beispielsweise Kommas oder Semikolons – gesetzt werden:

$$v = \begin{pmatrix} v_1, & v_2, & v_3 \end{pmatrix}.$$

Nullvektor

Als *Nullvektor* wird der folgende spezielle Vektor bezeichnet, dessen Einträge alle Null sind:

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Oft wird der Nullvektor mit 0 und manchmal als o bezeichnet.

Transponieren von Vektoren

Vektoren können *transponiert* werden. Das bedeutet nichts anderes als einen Zeilenvektor als Spaltenvektor aufzuschreiben – und umgekehrt:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{wird zu} \quad v^T = (v_1, v_2, v_3);$$

$$u = (u_1, u_2, u_3) \quad \text{wird zu} \quad u^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Länge eines Vektors

Die *Länge eines Vektors* lässt sich leicht mithilfe des *Skalarprodukts* oder geometrisch über den *Satz des Pythagoras* bestimmen. Es gilt

$$\left|v\right| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Allgemein gilt:

$$\left|v\right| = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}.$$

Normieren von Vektoren

Unter einem *normierten Vektor* v' zu einem Vektor v versteht man einen Vektor der Länge 1, der dieselbe Richtung wie v besitzt. Man erhält den normierten Vektor v' zu einem beliebigen Vektor v, indem man v mit dem Reziproken seiner Länge multipliziert.

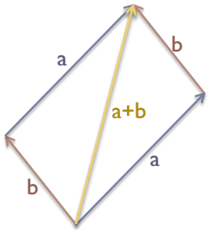
$$v' = \frac{1}{|v|} \cdot v$$

Addition von Vektoren

Die Addition von Vektoren erfolgt komponentenweise:

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} .$$

Grafisch kann man die Vektoraddition als Hintereinanderhängen der Vektoren betrachten.

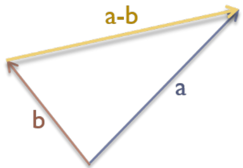


Subtraktion von Vektoren

Die Subtraktion von Vektoren erfolgt ebenfalls komponentenweise:

$$a - b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}.$$

Man kann die Subtraktion auch als Addition des Vektors $-b$ zum Vektor a betrachten. Betrachtet man a und b als Ortsvektoren der Punkte A und B, so stellt der Vektor $a - b$ den Vektor dar, der den Punkt B auf den Punkt A abbildet. Grafisch sieht dies wie folgt aus:

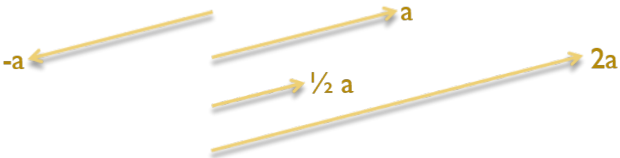


Skalare Multiplikation

Ein Vektor kann mit einem konstanten Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert werden. Den Wert λ nennt man *Skalar*.

$$\lambda a = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Man kann die *skalare Multiplikation* als Strecken oder Stauchen des Vektors interpretieren.



Aufgaben

Aufgabe XX-1

a) Berechne die Summe und die Differenzen der beiden Vektoren $a = (5, 0, 23)$ und $b = (4, 2, -7)$.

b) Berechne die Summe und die Differenzen der beiden Vektoren $a = (47, -8, 0)$ und $b = (3, 42)$.

Aufgabe XX-2

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (7, 5, -3)$ und $v_3 = (0, 2, 1)$. Berechne die Länge des Vektors $v = v_1 - v_2 + 3v_3$.

Aufgaben

Aufgabe XX-3

Entscheide, ob die Vektoren $v_1 = (4, -2, 5)$ und $v_2 = (-2, 4, 0)$ orthogonal sind. Begründe deine Antwort.

Skalarprodukt I

Das *Skalarprodukt* (auch *inneres Produkt* oder *Punktprodukt*) ist eine weitere Art der Vektormultiplikation. Dabei werden die Vektoren komponentenweise multipliziert und diese Produkte aufsummiert:

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Man nennt dies auch die *Koordinatenform* des Skalarprodukts.

Skalarprodukt II

Anhand des Skalarprodukts zweier Vektoren a und b kann man Rückschlüsse auf den Winkel zwischen diesen beiden Vektoren ziehen.

Es gilt:

$$a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \perp b.$$

In Worten: Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist genau dann 0, wenn die beiden Vektoren *senkrecht zueinander* (*orthogonal*) sind.

Skalarprodukt III

Eine andere Art, das Skalarprodukt zu definieren, ist die folgende:

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha.$$

- $|a|$ und $|b|$ sind die Längen der Vektoren a und b;
- α ist der zwischen den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel.

Skalarprodukt IV

Aus der Formel

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos\alpha$$

kann man Rückschlüsse auf den Winkel zwischen den beiden Vektoren a und b ziehen:

$$\cos\alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}.$$

Hieraus folgt

$$\alpha = \arccos\left(\frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}\right).$$

Skalarprodukt V

Abschließend sehen wir uns an, wie die bereits erwähnte Koordinatenform des Skalarprodukts hergeleitet werden kann.

Gegeben seien die beiden Vektoren $u = (u_1, u_2, u_3)$ und $v = (v_1, v_2, v_3)$. φ sei der zwischen u und v eingeschlossene Winkel.

Nach dem Kosinussatz gilt

$$|v - u|^2 = |v|^2 + |u|^2 - 2|u||v| \cos \varphi.$$

Umformen ergibt

$$|u||v| \cos \varphi = \frac{1}{2}\left(|v|^2 + |u|^2 - |v - u|^2\right).$$

Skalarprodukt VI

Einsetzen der Definition des Skalarprodukts ergibt

$$u \cdot v = \frac{1}{2}\left(|v|^2 + |u|^2 - |v-u|^2\right).$$

Mit der bekannten Formel für den Betrag eines Vektors erhält man:

$$\begin{aligned}
u \cdot v &= \frac{1}{2}\Bigg(\left(\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}\right)^2 + \left(\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\right)^2 \\
&\qquad - \left(\sqrt{(v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2+(v_3-u_3)^2}\right)^2\Bigg) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\cancel{v_1^2} + \cancel{v_2^2} + \cancel{v_3^2} + \cancel{u_1^2} + \cancel{u_2^2} + \cancel{u_3^2} - \cancel{v_1^2} + 2v_1u_1 - \cancel{u_1^2} \\
&\qquad - \cancel{v_2^2} + 2v_2u_2 - \cancel{u_2^2} - \cancel{v_3^2} + 2v_3u_3 - \cancel{u_3^2}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\left(2u_1v_1 + 2u_2v_2 + 2u_3v_3\right) \\
&= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.
\end{aligned}$$

Kreuzprodukt

Das *Kreuzprodukt* (auch *äußeres Produkt*, *vektorielles Produkt* oder *Vektorprodukt*) ist ebenfalls eine Art, zwei Vektoren a und b zu multiplizieren. Das Resultat ist ein neuer Vektor c, der sowohl senkrecht zu a (d.h. $a \perp c$) als auch senkrecht zu b (d.h. $b \perp c$) steht:

$$c = a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} .$$

Wichtig: Das Kreuzprodukt ist nur im $\mathbb{R}^3$ definiert!

Aufgaben

Aufgabe XX-4

Gegeben sind die folgenden Vektoren a, b und c:

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme $a \cdot b$, $a \cdot c$ sowie $b \cdot c$. Welche der Vektoren a, b und c sind senkrecht zueinander?

b) Bestimme einen Vektor, der sowohl senkrecht zu a als auch senkrecht zu b ist. Gib diesen als normierten Vektor an.

Kapitel XXI: Wiederholungen

Aufgaben

Aufgabe XXI-1

Vereinfache die folgenden Terme soweit wie möglich:

a) $\log\left(\frac{a}{b^2}\right) - \log\left(b^{-1}\right) + \log\left(\frac{a^2}{b^{-1}}\right)$

b) $\log\left(\frac{a}{2b}\right)$

c) $\log\left(\sqrt[3]{a^2}\right) - \log\left(a\right) + 2\log\left(\frac{1}{7}a\right)$

Aufgabe XXI-2

Vereinfache die folgenden Terme soweit wie möglich:

a) $a^{-3}a^3a^{-1}$

b) $\dfrac{(x^4z^3)^2}{x^6z^2}$

c) $\dfrac{7a^4b^{-6}}{49a^8b^{-3}}$

Aufgaben

Aufgabe XXI-3

Bestimme x!

$$a)\ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{0{,}5}\right)^{x} = \frac{1}{8} \qquad b)\ \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{x} = \frac{1}{9} \qquad c)\ \left(0,4^{0{,}25}\right)^{x} = 0,4$$

Aufgabe XXI-4

Beschreibe in deinen Worten, was die folgende Aussage bedeutet: „Die trigonometrischen Funktionen sind periodisch“. Gib für die folgenden Funktionen die Periodenlänge an:

$$\sin x \qquad \cos(2x) \qquad \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$$

Aufgaben

Aufgabe XXI-5

Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $2x^2 + \frac{3}{2}x - 2 = 0$ b) $x^2 + 3x - 1 = x - 3$

c) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

Aufgabe XXI-6

Gegeben seien die nachfolgenden Vektoren a und b. Bestimme x derart, dass $a \perp b$ gilt!

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}.$$